**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)
«РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ В Г. МИРНОМ»
Филиал «Светлинский»**

**УТВЕРЖДАЮ:
Зам. директора ГАПОУ РС(Я) «МРТК»
_____________ А.А. Мусорина
«_______» ____________ 2020 г.**

**РАССМОТРЕНО И РЕКОМЕНДОВАННО
К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ
на заседании кафедры «ОГД »
Протокол №_____________ от
«_____»______________________2020 г.**

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для студентов
по выполнению практических работ и контрольных работ
студентов по дисциплине «Математика»

Составитель: Нурмухаметов Р.И.

преподаватель общеобразовательных дисциплин

**Светлый
2020 год**

Аннотация

Данные методические рекомендации предназначены для студентов специальности: 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения при выполнении практических работ и контрольных работ по дисциплине «ПД.01 Математика».

В методических рекомендациях приведены темы практических и контрольных работ, примерные задания и методы решения практических и контрольных работ, даны указания по их выполнению и определены формы контроля. Методические рекомендации предназначены для организации практических и контрольных работ студентов в рамках реализации программ среднего профессионального образования.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ и контрольных работ представляют собой часть учебно-методического комплекта по учебной дисциплине Математика и соответствуют требованиям ФГОС и рабочей программе по дисциплине.

Целью создания разработки является оказание помощи студентам первого курса в освоении учебного материала по дисциплине в учреждениях среднего профессионального образования.

В связи с введением в образовательный процесс нового Федерального государственного образовательного стандарта, который ориентирован на выработку у студентов общих и профессиональных компетенций – набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда, все более актуальной становится задача организации практической работы студентов.

Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Выполнению практических и контрольных работ предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), оборудование, аппаратура, материалы и их характеристики, порядок выполнения работы, таблицы, выводы (без формулировки), контрольные вопросы, учебная и специальная литература.

При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание (задания по вариантам). Структура проведения сводится к следующему:

- сообщение темы и цели работы;

- актуализация теоретических знаний, которые необходимы для практической деятельности;

- разработка алгоритма проведения практической деятельности;

- непосредственное проведение практических работ и контрольных работ;

- оформление работы в тетрадях;

- обобщение и систематизация полученных результатов.

Оценки за выполнение практических работ и контрольных выставляются по пятибалльной системе и учитываются как показатели текущей успеваемости студентов.

Методическая разработка содержит все структурные элементы для организации и проведения практических и контрольных работ.

Цели практических занятий:

- помочь студентам систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;

- научить студентов приемам решения практических задач, способствовать овладению навыками и умениями выполнения расчетов, графических и других видов заданий;

- научить их пользоваться справочной литературой и таблицами;

- формировать умение учиться самостоятельно, т. е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

Цели контрольных работ:

- выявить уровень усвоения учащимися курса математики;

- проверить сформированность знаний, умений, навыков у студентов.

В результате проведения практических работ и контрольных работ по дисциплине «Математика» студент должен:

знать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике;

- широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;

- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;

- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

уметь:

- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения; выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;

- Выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций;

- вычислять значение функции по заданному значению аргумента; определять основные свойства числовых функций; строить графики изученных функций;

- находить производные элементарных функций; использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков; применять производную для нахождения наибольшего и наименьшего значения;

- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;

- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул; вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин; описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве; изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач; строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

Данную разработку могут использовать студенты для самостоятельной работы, а также преподаватели при проведении практических занятий по математике.

1. Методические рекомендации по выполнению практических работ.

1.1. Перечень практических работ.

№	Тема	Наименование работы	Кол-во часов
1	Тема 1.1. Развитие понятия о числе	Действия с приближенными значениями. Запись чисел в стандартном виде.	2
2		Действия с комплексными числами.	2
3	Тема 1.2 Тригонометрические функции числового аргумента	Тригонометрические функции углового аргумента	2
4		Формулы приведения. Формулы сложения.	2
5		Формулы понижения степени.	2
6	Тема 1.3 Преобразование тригонометрических выражений	Преобразование тригонометрических выражений.	2
7	Решение тригонометрическ	Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений. Методы	2

	их уравнений и неравенств	решения тригонометрических уравнений и неравенств.	
8	Тема 1.5. Корни, степени	Вычисление показательных и степенных выражений.	2
9		Преобразование рациональных, иррациональных выражений.	2
10		Преобразование степенных и показательных выражений.	2
11	Тема 1.6 Логарифмы	Логарифм числа.	2
12		Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию.	2
13		Преобразование логарифмических выражений	2
14	Тема 1.7 Функции, их свойства и графики	Область определения и множество значений, график функции.	2
15		Исследование функции.	2
16		Нахождение области определения и области значения функции. Построение графика функции.	2
17	Тема 1.8. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции	Преобразования графиков. Растяжение и сжатие вдоль осей координат.	2
18	Тема 2.1. Последовательности и функции	Вычисление числовых последовательностей.	2
19		Решение задач на геометрическую прогрессию.	2
20		Вычисление предела функции.	2
21	Тема 2.2. Дифференциальное исчисление	Вычисление производной сложной функции.	2
22	Тема 2.3. Интегральное исчисление	Вычисление площади криволинейной трапеции.	2
23	Тема 2.4. Уравнения и неравенства	Решение иррациональных уравнений и неравенств	2
24,25		Решение показательных, логарифмических уравнений и неравенств.	4
26	Тема 3.1. Прямые и плоскости в	Перпендикулярность прямой и плоскости.	2
27		Параллельность прямых, прямой и плоскости.	2

28	пространстве	Параллельность плоскостей	2
29,30		Перпендикулярность прямой и плоскости	4
31,32		Перпендикуляр и наклонные.	4
33		Перпендикулярность плоскостей	2
34	Тема 3.2. Многогранники	Сечения куба, призмы и пирамиды	2
35		Решение задач по теме «Призма	2
36		Решение задач по темам «Пирамида», «Усеченная пирамида»	2
37	Тема 3.3. Тела и поверхности вращения	Решение задач по теме «Цилиндр»	2
38		Решение задач по теме «Конус»	2
39		Решение задач по теме «Шар. Сфера»	2
40	Тема 3.4. Измерения в геометрии	Вычисление объема призмы. Вычисление объема цилиндра.	2
41		Вычисление объема шара, площади сферы	2
42		Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел.	2
43	Тема 3.5 Понятие вектора в пространстве	Линейные операции над векторами.	2
44	Тема 3.6 Метод координат в пространстве	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.	2
45,46		Вычисление угла между векторами. Вычисление скалярного произведения векторов.	4
47	Тема 4.3. Элементы математической статистики	Понятие о задачах математической статистики.	2

1.2. Рекомендации по выполнению практических работ.

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение ситуативных задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения ситуативных задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении поставленных задач нужно обосновывать каждый этап действий, исходя из теоретических положений курса. Если обучающийся видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала решения поставленных задач составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками, инструкциями по выполнению.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный результат следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи.

Подготовка к практическим занятиям.

Основой для подготовки студентов ко всем видам практических занятий являются разрабатываемые планы занятий. В них перечисляются вопросы для изучения, приводится перечень основной и дополнительной литературы, а также называются методические пособия, призванные оказывать помощь студентам в организации самостоятельной работы по данной теме.

Успех каждого практического занятия зависит от того, насколько активно и самостоятельно в нем участвуют студенты. Однако характер их участия в различных видах самостоятельных занятий различен. Он зависит от специфики самих занятий.

Одним из видов практических занятий, являются практические работы. Практические работы проводятся для формирования умений и навыков и направлены на обучение конкретной деятельности. В ходе практических работ студенты овладевают умениями работать с нормативными документами, справочниками, составляют чертежи, схемы, таблицы, техническую документацию и решают задачи (в соответствии с содержанием общеобразовательных общепрофессиональных и специальных дисциплин).

К каждой практической работе разрабатываются инструкции. Инструкции содержат методические рекомендации, а также конкретные практические задания. Расчеты студенты проводят по вариантам, что обеспечивает их самостоятельность в работе и позволяет преподавателю выявлять отстающих, проводить с ними индивидуальную работу.

Преподаватель осуществляет контроль за работой каждого студента, помогает тем из них, кто в этом нуждается, дает индивидуальные консультации.

В результате самостоятельного поэтапного решения предложенных заданий, студенты получают достаточно полное представление о практическом использовании изученного лекционного материала.

Практические работы студенты оформляют в отдельных тетрадях, пастой синего цвета.

1.3 Примерные задания и методы решения практических работ

Практическая работа №1 «Действия с приближенными значениями. Запись чисел в стандартном виде»

Пример 1.

В энциклопедии указано, что масса Земли равна 5,976 · 1024 кг. Оценим абсолютную погрешность приближенного значения массы Земли.

Обозначим массу Земли (в кг) буквой m. Так как в множителе 5,976 все цифры верные и последней цифрой является цифра тысячных, то m = (5,976 ± 0,001) · 1024. Раскрыв скобки, будем иметь m = 5,976 · 1024 ± 0,001 · 1024 или m = 5,976 · 1024 ± 1021. Эта запись означает, что абсолютная погрешность приближенного значения m меньше или равна 1021.

Если число записано в стандартном виде a · 10n и в множителе a все цифры верные, то такая запись позволяет легко оценить также относительную погрешность.

Пример 2.

Оценим относительную погрешность приближенного значения массы Земли.

В примере 1 мы оценили абсолютную погрешность такого приближенного значения. Она меньше или равна 1021. Значит, его относительная погрешность не превосходит $\frac{10^{21}}{5,976 \cdot 10^{24}} = \frac{1}{5976} < \frac{1}{1000}$. Видно, что относительная погрешность меньше единицы последнего разряда в записи множителя 5,976.

Аналогично можно показать, что если x ≈ a · 10n (где 1 ≤ 10 и множитель a записан верными цифрами), то относительная погрешность приближенного значения не превосходит единицы разряда, в котором записана последняя из этих цифр.

Практическая работа №2 «Действия с комплексными числами»

Пример 1.

Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраичекой форме:

(2+3i)*(3−i)=

Решение:

(2+3i)(3−i)=6−2i+9i−3i2=6+7i+3=9+7i.(2+3i)(3−i)=6−2i+9i−3i2=6+7i+3=9+7i.

Пример 2.

$(2i-i2)^2+(1-3i)^3=$

Решение.

(2i−i2)2+(1−3i)3=(2i+1)2+1−3(3i)2+3(3i)−(3i)3=(2i−i2)2+(1−3i)3=(2i+1)2+1−3(3i)2+3(3i)−(3i)3= =4i2+4i+1−27i2+9i−27i3=−4+4i+1+27−9i+27i=24+22i.=4i2+4i+1−27i2+9i−27i3=−4+4i+1+27−9i+27i=24+22i.

Практическая работа №3 «Тригонометрические функции углового аргумента»

Пример 1. В прямоугольном треугольнике известна гипотенуза c и острый угол $\alpha.$ Найти катеты, площадь треугольника и радиус описанной окружности, если $c = 12,\ \alpha = 60°.$

Решение:

Заметим, что ΔABC полностью задан – известна гипотенуза и острый угол α (рис. 2).

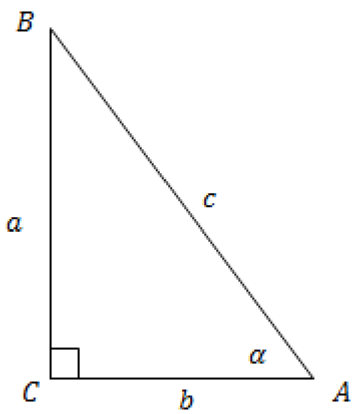


Рис. 2

Мы можем вычислить любой элемент треугольника:

$a = c \cdot sin\alpha;$

$a = 12 \cdot sin60° = 6\sqrt{3};$

$b = c \cdot cos\alpha;$

$b = c \cdot cos60° = 6;$

$S = \frac{1}{2} a \cdot b = 18\sqrt{3};$

Практическая работа №4 «Формулы приведения. Формулы сложения»

Пример: Выбрать формулу сложения для проверки формулы приведения следующего вида:sin (π2+α)=cos αsin (π2+α)=cos α.

Решение:

Нам подойдет формула синуса суммы.

Итого: sin (π2+α)=sin π2·cos α+cos π2·sin α=1·cos α+0·sin α=cos αsin (π2+α)=sin π2·cos α+cos π2·sin α=1·cos α+0·sin α=cos α

Ответ: sin (π2+α)=cos αsin (π2+α)=cos α - наша формула доказана.

Практическая работа №5 «Формулы понижения степени»

Пример.

Проверьте справедливость формулы понижения степени вида $\cos^4\alpha = \dfrac{3+4\cdot\cos2\alpha+\cos4\alpha}{8}$, взяв $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

Решение.

Чтобы проверить справедливость указанной формулы понижения степени для данного значения угла α, нужно вычислить значения левой и правой частей и убедиться, что они равны.

Так как $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, то $2\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ и $4\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$. Известно, что $\cos\alpha=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos2\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ и $\cos4\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$ (при необходимости смотрите статью значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса, тогда $\cos^4\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^4=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\dfrac{9}{16}$.

Таким образом, значения левой и правой частей формулы понижения степени вида $\cos^4\alpha = \dfrac{3+4\cdot\cos2\alpha+\cos4\alpha}{8}$ совпадают при $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, что подтверждает справедливость этой формулы для данного угла.

Практическая работа №6 «Преобразование тригонометрических выражений»

Пример.

Вычислите: $\frac{24}{\sin^2 39° + \sin^2 129°}$.

Решение.

Заметим, что в знаменателе данной дроби у синусов разные углы $39°$ и $129°$. Используем формулу приведения: $\sin^2 129° = \sin^2(90° + 39°) = \cos^2 39°$ и тогда наше выражение примет вид: $\frac{24}{\sin^2 39° + \cos^2 39°}$, в знаменателе тригонометрическое тождество, равное 1. Нам осталось 24 разделить на 1, получаем 24.

Практическая работа №7

«Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств»

Пример.

Решить уравнение: $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2ctgx - 1$.

Решение.

Обе части уравнения легко представляются как выражение, зависящее только от *tgx*:

$$\frac{tgx + 1}{1 - tgx} = \frac{2}{tgx} - 1.$$

Далее, заменой *tgx* = *y*, тригонометрическое уравнение рационализуется:

$$\frac{y + 1}{y - 1} = \frac{2}{y} - 1.$$

В итоге $y=\frac{1}{2}$, т.е. $tgx=\frac{1}{2}$ и $x=arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$.

Однако можно заметить, что значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ также удовлетворяют исходному уравнению. Это потерянные корни. В чем причина?! В основе преобразований формулы, сужающие область определения: $\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=tg(\alpha+\beta)$.

Практическая работа №8

«Вычисление показательных и степенных выражений»

Пример 1. Найдите значение выражения:

$$\frac{49^{5,2}}{7^{8,4}}$$

$$\frac{49^{5,2}}{7^{8,4}}=\frac{(7\cdot 7)^{5,2}}{7^{8,4}}=\frac{7^{5,2}\cdot 7^{5,2}}{7^{8,4}}=\frac{7^{5,2+5,2}}{7^{8,4}}=\frac{7^{10,4}}{7^{8,4}}=7^{10,4-8,4}=7^2=49$$

Ответ: 49

Пример 2. Найдите значение выражения:

$$\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}}\cdot\frac{16}{a^{-1}b^{-4}}$$

$$\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}}\cdot\frac{16}{a^{-1}b^{-4}}=\frac{16a^2b^{-6}}{4^3a^3b^{-2}a^{-1}b^{-4}}=\frac{16a^2b^{-6}}{64\cdot a^{3+(-1)}\cdot b^{-2+(-4)}}=$$

$$=\frac{16a^2b^{-6}}{64\cdot a^2\cdot b^{-6}}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}=0,25$$

Ответ: 0,25

Практическая работа №9

«Преобразование рациональных, иррациональных выражений»

Пример.

Преобразуйте иррациональное выражение $9+\sqrt[3]{3}-2+4\cdot\sqrt[3]{3}+1-2\cdot\sqrt[3]{3}$.

Решение.

Для начала заменим корень из 81 его значением 9 (при необходимости смотрите извлечение корней), имеем

$$\sqrt{81}+\sqrt[3]{3}-2+4\cdot\sqrt[3]{3}+1-2\cdot\sqrt[3]{3}=$$
$$=9+\sqrt[3]{3}-2+4\cdot\sqrt[3]{3}+1-2\cdot\sqrt[3]{3}$$

Очевидно, в полученном выражении присутствуют подобные слагаемые, поэтому целесообразно выполнить их приведение:

$$9+\sqrt[3]{3}-2+4\cdot\sqrt[3]{3}+1-2\cdot\sqrt[3]{3}=$$
$$=(9-2+1)+\left(\sqrt[3]{3}+4\cdot\sqrt[3]{3}-2\cdot\sqrt[3]{3}\right)=$$
$$=8+3\cdot\sqrt[3]{3}$$

Практическая работа №10

«Преобразование степенных и показательных выражений»

Пример 1.

Вычислите значение степенного выражения $2^3\cdot(4^2-12)$.

Решение.

Согласно порядку выполнения действий сначала выполняем действия в скобках. Там, во-первых, заменяем степень 4^2 ее значением 16 (при необходимости смотрите возведение в степень), и во-вторых, вычисляем разность $16-12=4$. Имеем $2^3\cdot(4^2-12)=2^3\cdot(16-12)=2^3\cdot4$.

В полученном выражении заменяем степень 2^3 ее значением 8, после чего вычисляем произведение $8\cdot4=32$. Это и есть искомое значение.
Итак, $2^3\cdot(4^2-12)=2^3\cdot(16-12)=2^3\cdot4=8\cdot4=32$.

Пример 2.

Упростить выражения со степенями $3\cdot a^4\cdot b^{-7}-1+2\cdot a^4\cdot b^{-7}$.

Решение.

Очевидно, что данное выражение содержит подобные слагаемые $3\cdot a^4\cdot b^{-7}$ и $2\cdot a^4\cdot b^{-7}$, и мы можем привести

их: $3\cdot a^4\cdot b^{-7}-1+2\cdot a^4\cdot b^{-7}=5\cdot a^4\cdot b^{-7}-1$.

Практическая работа №11 «Логарифм числа»

Пример 1. Вычислить $\log_a \sqrt{ab}$, если $\log_a b = 7$

Решение. Перепишем данное выражение, используя свойство логарифма степени и логарифма произведения:

$$\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2}(1+7) = 4$$

Пример 2. Вычислить $\ln 2e^2 + \ln\frac{1}{2e}$

Решение. Преобразуем данное выражение, используя свойство суммы логарифмов и определение натурального логарифма:

$$\ln 2e^2 + \ln\frac{1}{2e} = \ln\left(2e^2\cdot\frac{1}{2e}\right) = \ln e = 1$$

Практическая работа №12

«Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию»

Пример.

Вычислите:

$$\frac{\log_5 12 - \log_5 4}{\log_5 18 + \log_5 0{,}5} - \frac{\lg 64 + \lg 0{,}5}{\lg 7 - \lg 14}$$

Решение

Разность логарифмов с одинаковым основанием – это логарифм частного, а сумма логарифмов с одинаковым основанием – логарифм произведения. А у нас в числителях и знаменателях стоят логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$$

Применяя эти свойства, получаем:

$$\frac{\log_5 12 - \log_5 4}{\log_5 18 + \log_5 0{,}5} - \frac{\lg 64 + \lg 0{,}5}{\lg 7 - \lg 14} = \frac{\log_5 \frac{12}{4}}{\log_5 (18 \cdot 0{,}5)} - \frac{\lg(64 \cdot 0{,}5)}{\lg \frac{7}{14}} = \frac{\log_5 3}{\log_5 9} - \frac{\lg 32}{\lg 0{,}5}$$

Согласно формуле перехода к новому основанию $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$:

$$\frac{\log_5 3}{\log_5 9} = \log_9 3$$

$$\frac{\lg 32}{\lg 0{,}5} = \log_{0{,}5} 32$$

Следовательно: $\frac{\log_5 3}{\log_5 9} - \frac{\lg 32}{\lg 0{,}5} = \log_9 3 - \log_{0{,}5} 32$

Из основания логарифма показатель степени n выносится за знак логарифма как $\frac{1}{n}$, а из подлогарифмического выражения – как n, то есть:

$$\log_9 3 = \log_{3^2} 3 = \frac{1}{2} \log_3 3$$

$$\log_{0{,}5} 32 = \log_{2^{-1}} 2^5 = (-1) \cdot \log_2 2^5 = (-5) \cdot \log_2 2$$

Следовательно: $\log_9 3 - \log_{0{,}5} 32 = \frac{1}{2} \log_3 3 - (-5) \cdot \log_2 2 = \frac{1}{2} + 5 = 5\frac{1}{2}$

Ответ: $5^{\frac{1}{2}}$.

Практическая работа №13

«Преобразование логарифмических выражений»

Пример. Вычислите: $\dfrac{5^{\sqrt{\log_5 2}}}{2^{\sqrt{\log_2 5}}}$

Решение. Заметим, что в показателе степени у нас стоит логарифм под знаком квадратного корня, поэтому основное логарифмическое тождество мы применить не можем.

Используем прием, который хорошо помогает, если мы имеем дело с произведением или частным логарифмов.

Пусть искомое выражение равно y:

$$y=\frac{5^{\sqrt{\log_5 2}}}{2^{\sqrt{\log_2 5}}}$$

Возьмем от обеих частей логарифм по основанию 5. (Могли бы взять логарифм по основанию 2 - в данном случае это не имеет значения)

Получим: $\log_5 y=\log_5\left(\dfrac{5^{\sqrt{\log_5 2}}}{2^{\sqrt{\log_2 5}}}\right)$

Преобразуем выражение в правой части равенства. Воспользуемся следующими свойствами логарифмов:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b\text{-}\log_a c$$

$$\log_a b^n=n log_a b$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

Получим: $\log_5\left(\frac{5^{\sqrt{\log_5 2}}}{2^{\sqrt{\log_2 5}}}\right)=$

$$\log_5\left(5^{\sqrt{\log_5 2}}\right) - \log_5\left(2^{\sqrt{\log_2 5}}\right)=$$

$$\sqrt{\log_5 2}\times\log_5 5 - \sqrt{\log_2 5}\times\log_5 2=$$

$$\sqrt{\log_5 2} - \frac{\log_5 2}{\sqrt{\log_5 2}}=$$

$$\sqrt{\log_5 2} - \sqrt{\log_5 2}=0$$

Итак,

$$\log_5 y=0$$

Отсюда

$$y=1$$

Ответ: 1

Практическая работа №14

«Область определения и множество значений, график функции»

Пример 1. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-3}$$

Решение: в числителе ничего особенного нет, а вот знаменатель должен быть ненулевым. Давайте приравняем его к нулю и попытаемся найти «плохие» точки:

$$x^2-3=0$$
$$x^2=3$$

Полученное уравнение имеет два корня: $x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$. Данные значения **не входят в область определения функции**. Действительно,

подставьте $x=-\sqrt{3}$ или $x=\sqrt{3}$ в функцию $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3}$ и вы увидите, что знаменатель обращается в ноль.

Пример 2. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2x+5}$$

Решение: попытаемся найти точки, в которых знаменатель обращается в ноль. Для этого решим **квадратное уравнение**:

$$x^2+2x+5=0$$
$$D=4-20=-16<0$$

Дискриминант получился отрицательным, а значит, действительных корней нет, и наша функция определена на всей числовой оси.

Ответ: область определения: $D(f)=\Re$

Практическая работа №15

«Исследование функции»

Пример. Провести полное исследование и построить график функции

$y(x)=x^2+81-x$.

Решение.

1) Область определения функции. Так как функция представляет собой дробь, нужно найти нули знаменателя.

$1-x=0, \Rightarrow x=1$.

Исключаем единственную точку $x=1$ из области определения функции и получаем:

D(y)=(−∞;1)∪(1;+∞).

2) Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+8}{1-x} = +\infty;\ \lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+8}{1-x} = -\infty$$

Так как пределы равны бесконечности, точка x=1 является разрывом второго рода, прямая x=1- вертикальная асимптота.

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем x=0:

$$y = \frac{0^2+8}{1-0} = 8$$

Таким образом, точка пересечения с осью Oy\ имеет координаты (0;8)

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox\, для чего положим y=0:

$$\frac{x^2+8}{1-x} = 0 \ \to \ x^2+8 = 0$$

Уравнение не имеет корней, поэтому точек пересечения с осью Ox нет.

Заметим, что $x^2+8>0$для любых x. Поэтому при x∈(−∞;1)функция y>0 (принимает положительные значения, график находится выше оси абсцисс), при x∈(1;+∞)функция y<0 (принимает отрицательные значения, график находится ниже оси абсцисс).

4) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как: $y(-x) = \frac{(-x)^2+8}{1-(-x)} = \frac{x^2+8}{1+x};\ y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$

5) Исследуем функцию на периодичность. Функция не является периодической, так как представляет собой дробно-рациональную функцию.

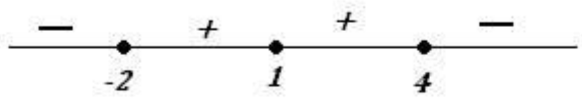
6) Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+8}{1-x}\right)' = \frac{(x^2+8)'(1-x)-(x^2+8)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{2x(1-x)-(x^2+8)(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2x-2x^2+x^2+8}{(1-x)^2} = -\frac{x^2-2x-8}{(1-x)^2}$$

Приравняем первую производную к нулю и найдем стационарные точки (в которых y′=0): $y' = 0 \rightarrow -\frac{x^2-2x-8}{(1-x)^2} = 0 \rightarrow x^2-2x-8 = 0 \rightarrow \ x = -2; x = 4$

Получили три критические точки: x=–2,x=1,x=4. Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:



При x∈(−∞;−2),(4;+∞) производная y′<0, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При x∈(−2;1),(1;4) производная y′>0, функция возрастает на данных промежутках.

При этом x=–2 - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает), x=4 - точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

Найдем значения функции в этих точках:

$$y(-2) = \frac{(-2)^2+8}{1-(-2)} = \frac{12}{3} = 4 \ y(4) = \frac{4^2+8}{1-4} = \frac{24}{-3} = -8$$

Таким образом, точка минимума (−2;4), точка максимума (4;−8).

7) Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \left(-\frac{x^2-2x-8}{(1-x)^2}\right)' = -\frac{(x^2-2x-8)'(1-x)^2-(x^2-2x-8)((1-x)^2)'}{(1-x)^4} =$$

$$= -\frac{(2x-2)(1-x)^2-(x^2-2x-8)\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = -\frac{(2x-2)(1-x)+2(x^2-2x-8)}{(1-x)^3} =$$

$$= -\frac{2(-x^2+2x-1+x^2-2x-8)}{(1-x)^3} = \frac{-2\cdot(-9)}{(1-x)^3} = \frac{18}{(1-x)^3}$$

Приравняем вторую производную к нулю:

$$y'' = 0 \rightarrow \frac{18}{(1-x)^3} = 0$$

Полученное уравнение не имеет корней, поэтому точек перегиба нет. При этом, когда $x \in (-\infty;1)$выполняется $y''>0$, то есть функция вогнутая, когда $x \in (1;+\infty)$ выполняется $y''<0$, то есть функция выпуклая.

Практическая работа №16

«Нахождение области определения и области значения функции. Построение графика функции»

Пример. Найти область определения и область значения функции
y= 4x/(3+x)

Решение.

1. Найдем D (y)//т.е. какие значения может принимать х. для этого найдем ОДЗ (область допустимых значений дроби)
3+x≠0
x≠-3
значит D (y) данной функции (∞; 3) и (3;+∞)// всё множество действительных чисел, кроме 3.
2. Найдем E (y)//т.е. какие значения может принимать y, при всех возможных x

решаем уравнение вида 4x/(3+x)=A, где A є E (y)

(3+x)A=4x

3A=4x-xA

3A=x(4-A)

x=3A/(4-A)

значит E (y) данной функции (∞; 4) и (4;+∞)// всё множество действительных чисел, кроме 4.

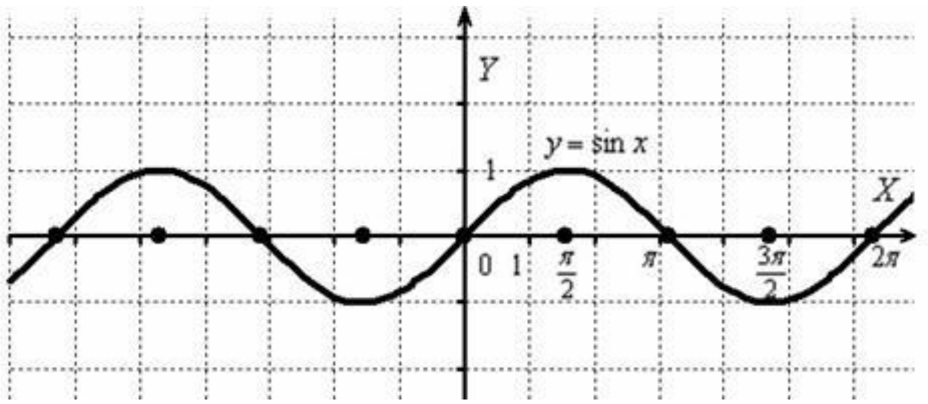
Практическая работа №17

«Преобразования графиков. Растяжение и сжатие вдоль осей координат»

Пример 1

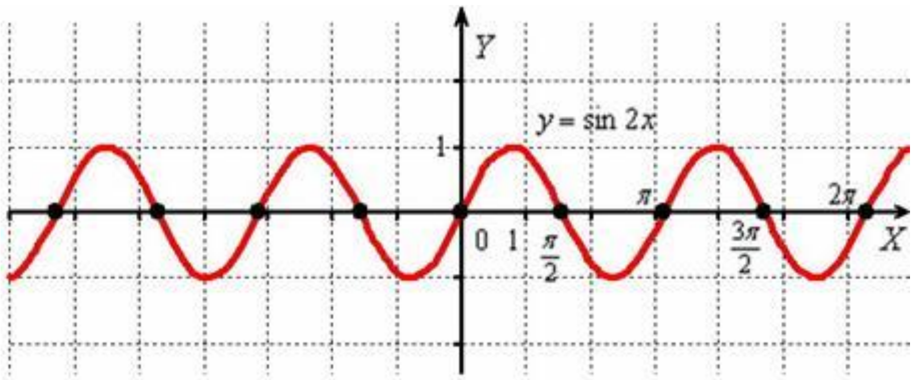
Построить график функции $y = \sin 2x$.

Сначала изобразим график синуса, его период равен $T = 2\pi$:



К слову, чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие кропотливое, поскольку $\pi \approx 3{,}14, \quad \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57, \quad 2\pi \approx 6{,}28$ и т.д., то есть на стандартной клетчатой бумаге аккуратным нужно быть вплоть до миллиметра, даже до полумиллиметра. Впрочем, многие с этим уже столкнулись.

Теперь поиграем на бесконечно длинном баяне. Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её **к оси** OY в 2 раза:



То есть, график функции $y = \sin 2x$ получается путём сжатия графика $y = \sin x$ к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: $T = \pi$

В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0$$

Практическая работа №18

«Вычисление числовых последовательностей»

Пример. В числовой последовательности $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$, где $n = 3{,}4{,}5 \dots$, найти 7 член.

Решение

Для того чтобы найти 7 член данной последовательности, необходимо знать 5 и 6 член. В предыдущем примере мы нашли 3, 4 и 5 член, следовательно, можно найти 6, а далее и 7 член.

$y_4 = 3$; $y_5 = 5$; $y_6 = 3 + 5 = 8$; $y_7 = 5 + 8 = 13$

Ответ: $y_7 = 13$.

Практическая работа №19 «Решение задач на геометрическую прогрессию»

Пример 1. $1. (b_n) -$ геометрическая прогрессия;

$q = \frac{1}{4}; \; b_3 = 2.$

Найти: $b_5 + b_1$.

Решение:

$b_3 = b_1 \cdot q^2; 2 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2; \; b_1 = 32;$

$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;

$b_5 + b_1 = 32\frac{1}{8}$.

Ответ: $32\frac{1}{8}$.

Пример 2. $(b_n) -$геометрическая прогрессия,

$b_1 = 0{,}5; \; b_4 = 4$.

Найти: S_5.

Решение:

$b_4 = b_1 \cdot q^3; 4 = \frac{1}{2} \cdot q^3;\ q^3 = 8; q = 2;$

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{0{,}5(2^5 - 1)}{2 - 1} = 15{,}5.$$

Ответ: 15,5.

Практическая работа №20

«Вычисление предела функции»

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$.

Решение. Максимальная степень «икса» в числителе: 2

Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (x можно записать как x^1)

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}^{\to 0} - \frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0} + \frac{1}{x^2}^{\to 0}} = \frac{2}{0} = \infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Практическая работа №21

«Вычисление производной сложной функции»

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + tgx + 15}$

Решение. Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left(\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left(\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + tgx + 15\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left(\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + tgx + 15\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)' =$$
$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (tgx)' + (15)') =$$
$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Готово. Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

Практическая работа №22

«Вычисление площади криволинейной трапеции»

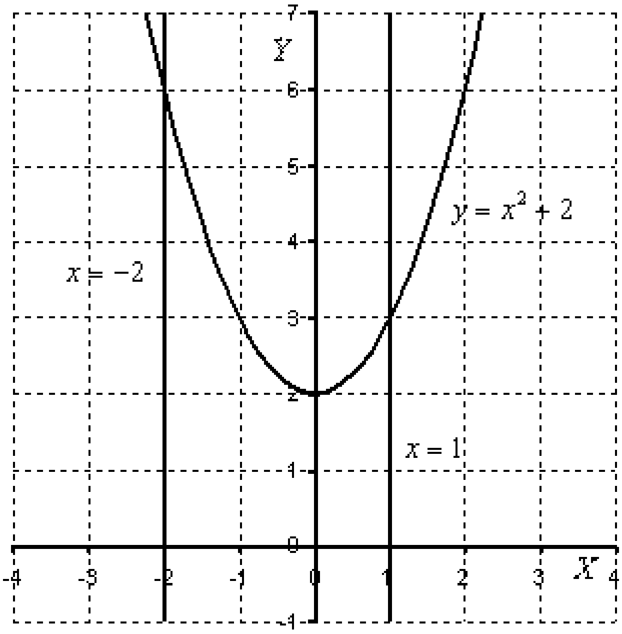
Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

Решение. Это типовая формулировка задания. ***Первый и важнейший момент решения – построение чертежа***. Причем, чертеж необходимо построить ***ПРАВИЛЬНО***.

При построении чертежа я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все прямые (если они есть) и только **потом** – параболы, гиперболы, графики других функций. Там же можно найти очень полезный применительно к нашему уроку материал – как быстро построить параболу.

В данной задаче решение может выглядеть так.

Выполним чертеж (обратите внимание, что уравнение $y = 0$ задает ось OX):



Штриховать криволинейную трапецию я не буду, здесь очевидно, о какой площади идет речь. Решение продолжается так:

На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен **над осью** OX, поэтому:

$$S = \int_{-2}^{1}(x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: $S = 9\ ед^2$

Практическая работа №23

«Решение иррациональных уравнений и неравенств»

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2x-1}$ = x – 2,

Решение.

$\sqrt{2x-1}$ = x – 2,

$2x - 1 = x^2 - 4x + 4$, Проверка:

$x^2 - 6x + 5 = 0$, x = 5, $\sqrt{2 \times 5 - 1}$ = 5 – 2,

$x_1 = 5$, 3 = 3

$x_2 = 1$ – постор. корень x = 1, $\sqrt{2 \times 1 - 1} \neq 1 - 2$,

Ответ: 5 пост. к. 1 $\neq$-1.

Практическая работа №24, №25

«Решение показательных, логарифмических уравнений и неравенств»

Пример. Решите уравнение $\mathbf{2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x = 0}$.

Решение:

Разделим обе части уравнения на 25^x:

$$2 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{10}{25}\right)^x - 5 = 0,$$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - 5 = 0;$$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = m$, $m > 0$, тогда

$$2m^2 - 3m - 5 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} m_1 = \frac{5}{2}; \\ m_2 = -1 \text{ не подходит, т. к. } m > 0; \end{array}\right.$$

Если $m = \frac{5}{2}$, то

$\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2}$,

$x = -1$.

Ответ*:* -1.

Практическая работа №26

«Перпендикулярность прямой и плоскости»

Пример. В треугольнике *ABC* сумма углов *A* и *B* равна 90° (рис.1). Прямая *BD* перпендикулярна плоскости *ABC*. Докажите, что прямая *CD* перпендикулярна прямой *AC*.

Дано: В ΔABC $\angle A + \angle B = 90°$

$BD \perp ABC$

Доказать: $CD \perp AC$

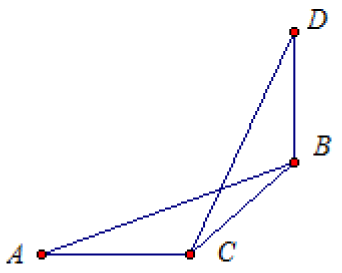


Рис. 1

Доказательство:

Так как $\angle A + \angle B = 90$, то $\angle ACB = 90°$.

Итак, прямая *AC* перпендикулярна прямой *BC*, прямая *AC* перпендикулярна прямой *BD*, т.к. *BD* перпендикулярна по условию плоскости *ABC*. Значит, прямая *AC* перпендикулярна двум пересекающимся в точке *B* прямым из плоскости *BCD*.

Получаем, что прямая *AC* перпендикулярна плоскости *BCD*(по признаку), а значит, и прямой *CD*, так как $CD \subset BCD$, что и требовалось доказать.

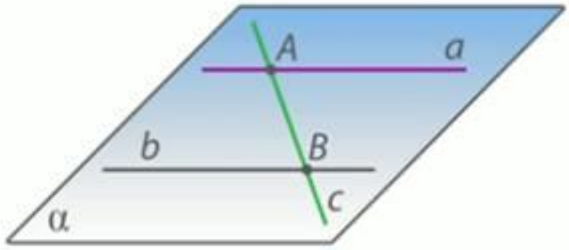
Практическая работа №27

«Параллельность прямых, прямой и плоскости»

Пример. Параллельные прямые *a* и *b* лежат в плоскости α. Докажите, что прямая с, пересекающая прямые *a* и *b*, также лежит в плоскости α.

Дано: a || b, $a \in \alpha,\ b \in \alpha,\ c \cap a = A,\ c \cap b = B$

Доказать: $c \in \alpha$



Доказательство:

Точка А прямой *c*, принадлежит и прямой *a,* а значит, и плоскости α. Точка В прямой *c* принадлежит прямой *b,* а значит, и плоскости α. Так как две точки прямой *c* принадлежат плоскости α, то и вся прямая лежит в плоскости α, в силу аксиомы А2.

Практическая работа №28

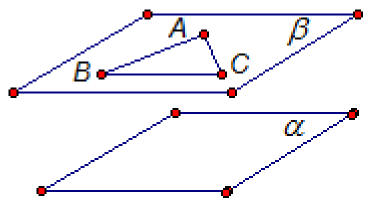
«Параллельность плоскостей»

Пример. Две стороны треугольника параллельны плоскости α.

Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α.

Доказательство:

Дан треугольник *ABC* и плоскость α. Стороны *AB* и *AC* параллельны плоскости α (Рис. 7.). Докажем, что и сторона *BC* параллельна плоскости α. Через две пересекающиеся прямые *AC* и *AB* проходит плоскость β и притом только одна. Плоскость β параллельна плоскости α, так как прямые AC и AB параллельны плоскости α (из задачи 2). Но прямая BC лежит в плоскости β, а значит BC параллельна плоскости α (из задачи 1).



Практическая работа №29, №30

«Перпендикулярность прямой и плоскости»

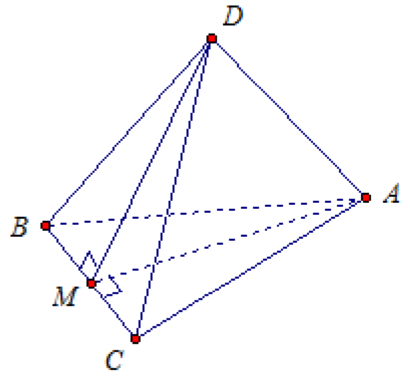
Пример. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC. Точка D равноудалена от концов отрезка BC, точка A также равноудалена от концов отрезка BC.

Дано: $D \notin ABC$,

$DB = DC$,

$AB = AC$

Доказать: $BC \perp AD$



Доказательство:

Пусть M – середина отрезка BC. Треугольник ABC – равнобедренный, так как AB = AC. Тогда медиана AM является и высотой, то есть $AM \perp BC$.

Треугольник DBC – равнобедренный, так как DB = DC. Тогда медиана DM является и высотой, то есть $DM \perp BC$.

Прямая ВС перпендикулярна двум пересекающимся прямым DM и AM из плоскости DMA, а значит, прямая ВС перпендикулярна прямой DA, которая лежит в плоскости DMA, что и требовалось доказать.

Практическая работа №31, №32

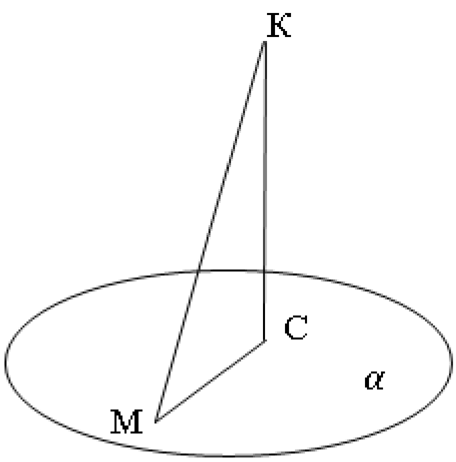
«Перпендикуляр и наклонные»

Пример 1.

Из точки К, на расстоянии 9 см, к плоскости α опущен перпендикуляр КС и проведена наклонная КМ, равная 15 см.

Найти проекцию наклонной. (Устно, менять условие, найти наклонную, найти перпендикуляр)

Решение:



Рассмотрим прямоугольный треугольник КСМ: (КС-перпендикуляр, по условию), по теореме Пифагора:

$$МС^2 = МК^2 - КС^2$$

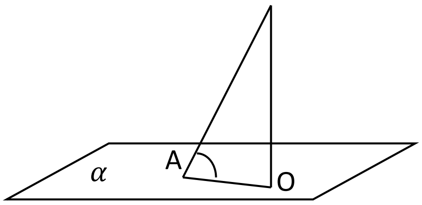
$$МС = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144}$$ =12 (см)

Ответ: Проекция наклонной МС=12 см.

Пример 2.

К плоскости α проведена наклонная АВ (А∈α). Длина наклонной равна 8 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычисли, на каком расстоянии от плоскости находится точка В.

Решение: В Рассмотрим треугольник АВО: прямоугольный, ВО-



расстояние от точки B до плоскости α,

перпендикулярно AO. Следовательно угол B=30°, а AO =4 см, как катет лежащий против угла в 30°.

По теореме Пифагора:

$$BO^2 = AB^2 - AO^2$$

$$BO^2 = 8^2 - 4^2$$

BO $=\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см)

Ответ: $4\sqrt{3}$ см.

Практическая работа №33

«Перпендикулярность плоскостей»

Пример. Точки *A* и *B* лежат на ребре данного двугранного угла, равного 120°.

Отрезки *AC* и *BD* проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла.

Найдите отрезок *CD*, если *AB* = *AC* = *BD* = *a*.

Дано: $\angle CABD = 120°$,

$AC \perp AB$, $AC \subset \alpha$,

$BD \perp AB$, $BD \subset \beta$,

$AB = AC = BD = a$.

Найти: *CD*.

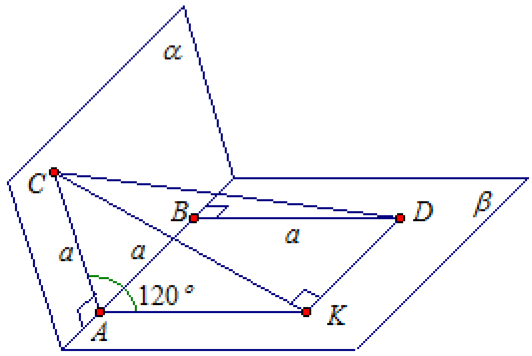


Рис. 2

Решение:

Здесь дан тупой двугранный угол, ∠*CABD*= 120°.

AB – ребро двугранного угла, точка *C* лежит в одной полуплоскости, точка *D* лежит в другой полуплоскости. В одной полуплоскости проведена прямая *AC*, перпендикулярная *AB*. В другой полуплоскости проведена прямая *BD*, перпендикулярная *AB*.

Проведем *AK* перпендикулярно *AB* и *DK* параллельно *AB* (рис. 2). Тогда угол *CAK* – линейный угол двугранного угла, а значит, ∠*CAK* = 120°.

Так как прямые *AK* и *BD* перпендикулярны одной и той же прямой *AB*, то прямые *AK* и *BD* – параллельны. В четырехугольнике *AKDB* противоположные стороны параллельны (*AK*||*BD*, *AB*|| *DK*), значит, *AKBD*– параллелограмм. Значит, *AK*=*BD* = *a*.

Рассмотрим треугольник *AKC*. Найдем CK^2 с помощью теоремы косинусов:

$$CK^2 = AC^2 + AK^2 - 2 \cdot AC \cdot AK \cdot \cos\angle CAK = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 120° = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

Прямая *AB* перпендикулярна плоскости линейного угла (по свойству 1), значит, и параллельная ей прямая *DK* перпендикулярна плоскости линейного угла. А значит, прямая *DK* перпендикулярна прямой *CK*, лежащей в плоскости линейного угла, то есть угол *CKD* прямой.

Из прямоугольного треугольника *CKD* по теореме Пифагора находим гипотенузу *CD*.

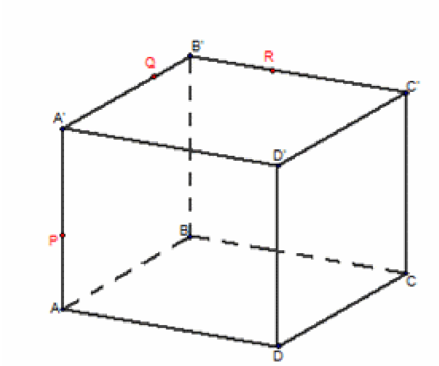
$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$$

Ответ: *2a*.

Практическая работа №34

«Сечения куба, призмы и пирамиды»

Пример. Построить сечение (*PQR*) параллелепипеда. Все точки лежат на ребрах двух смежных граней.



Построение:

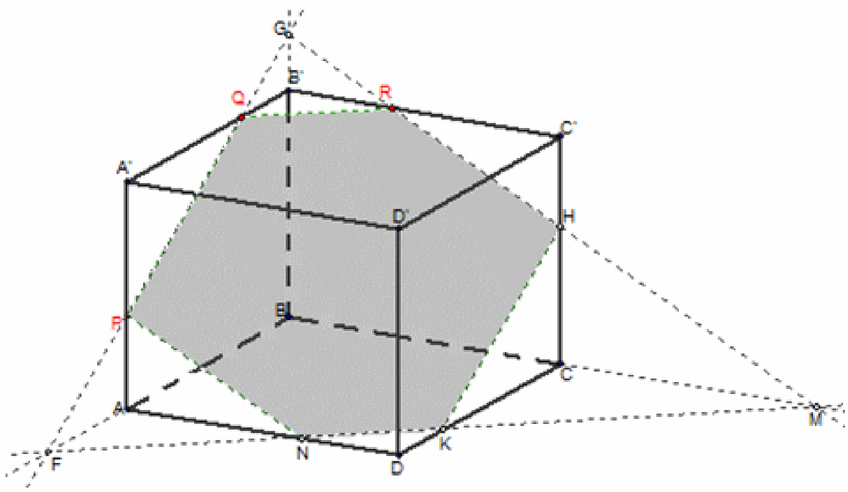
1) Строим *PQ* и *QR*;

2) $PQ \cap BA = F,\ PQ \cap BB' = G$;

3) $GR \cap CC' = H,\ GR \cap BC = M$;

4) $FM \cap AD = N,\ FM \cap DC = K$;

5) *PQRHKN* — искомое сечение.



Практическая работа №35

«Решение задач по теме «Призма»

Пример. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 21см и 9 см и высотой 8 см (рис. 3). Найдите площадь боковой поверхности, если боковое ребро равно 10 см.

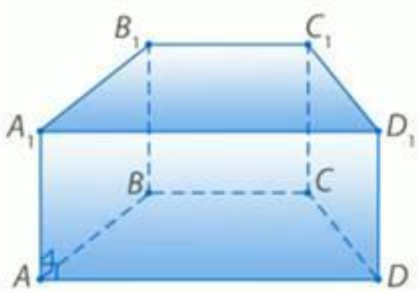


Рис. 3

Дано: *AD* ∥ *BC*, *AB* = *CD*,

AD = 21см, *BC* = 9см, *BH* = 8 см,

$AA_1 \perp ABC$, $AA_1 = 10$ см. (рис. 4)

Найти: $S_{бок}$

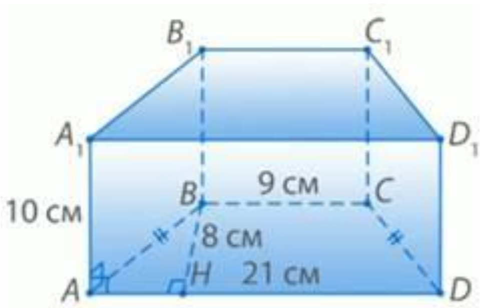


Рис. 4

Решение:

Рассмотрим трапецию *ABCD* (рис. 5). *BH* и *CG* – высоты трапеции. *AD* = 21см, *BC* = 9см. Так как трапеция *ABCD* равнобокая, то *HG* = *BC* = 9 см, $AH = GD = \frac{AD-BC}{2} = \frac{21-9}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (см).

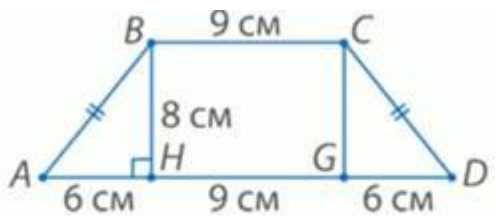


Рис. 5

Рассмотрим треугольник ΔABH и найдем сторону AB по теореме Пифагора:

$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ (см).$

Найдем периметр основания.

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 10 + 9 + 10 + 21 = 50\ (см).$

Применяем формулу для площади боковой поверхности:

$S_{бок} = P_{осн} \cdot h = P_{ABCD} \cdot AA_1 = 50 \cdot 10 = 500\ (см^2).$

Ответ: 500 $см^2$

Практическая работа №36

«Решение задач по темам «Пирамида», «Усеченная пирамида»

Пример. Основанием пирамиды является квадрат ABCD со стороной 4 см, высота – отрезок $AM = 3$ см. найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

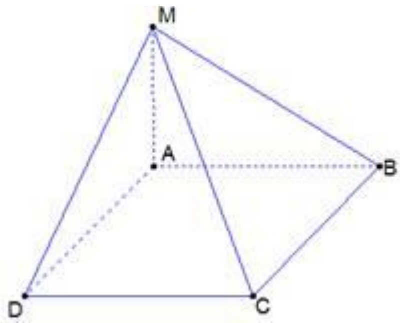


Рис. 1. Иллюстрация к задаче 1

MA⊥ABC. Прямоугольные треугольники MAB и MAD равны по двум катетам, отсюда $MB = MD$. Треугольники MCD и MCB равны по трем сторонам. Отсюда:

$S_{б.п.} = 2S_{MAD} + 2S_{MCD}$

AD – проекция прямой MD на плоскость ABC, AD⊥DC⇒MD⊥DC, отсюда имеем прямоугольный треугольник MDC.

В прямоугольном треугольнике MAD найдем по теореме Пифагора гипотенузу:

$MD = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Найдем площадь рассматриваемого прямоугольного треугольника:

$S_{MAD} = \frac{1}{2}\text{MA} * AD = 6$

Рассмотрим прямоугольный треугольник MDC и найдем его площадь:

$S_{MCD} = \frac{1}{2}MD * DC = 10$

Ответ:

$S_{\text{б.п.}} = 2S_{MAD} + 2S_{MCD} = 32\ (\text{см}^2)$.

Практическая работа №37

«Решение задач по теме «Цилиндр»

Пример. Высота цилиндра равна 8 см, радиус основания – 5 см. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно его оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние от оси до плоскости этого сечения. (См. Рис. 8.)

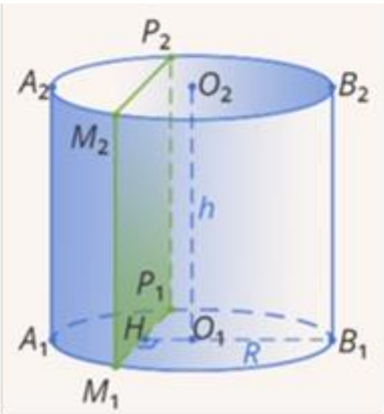


Рис. 8. Цилиндр, иллюстрирующий условие

Решение.

Для начала поймем, что надо найти. Искомое расстояние – перпендикуляр из центра основания на хорду, отсекаемую в основании. Докажем это. Во-первых, данный отрезок перпендикулярен оси (а по определению расстояния, искомый отрезок должен быть перпендикулярен и оси, и плоскости сечения). Во-вторых, он перпендикулярен хорде и образующей, лежащим в плоскости сечения, а тогда, по признаку, он перпендикулярен всей плоскости. Итак, что найти – поняли.

Очевидно, одна из сторон квадрата равна высоте, т. е. оси, а значит, и вторая равна ей же. Таким образом, сечение отсекает от основания хорду длиной 8 см.

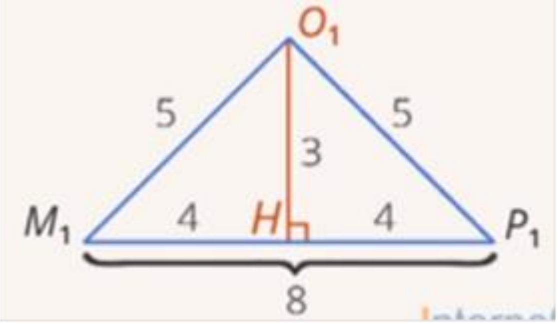


Рис. 9. Выносной рисунок фигуры в нижнем основании

Сделаем отдельный рисунок окружности нижнего основания.(См. Рис. 9.)

Радиус окружности – 5, хорда длины – 8, нужно найти расстояние от радиуса до хорды. Очевидно, это просто высота равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основой 8. Найти ее несложно: она же является и медианой, значит, делит хорду на 4 и 4.

Так что искомое расстояние равно 3 по теореме Пифагора (или из того, что треугольник египетский).

Ответ: 3 см.

Практическая работа №38

«Решение задач по теме «Конус»

Пример. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади его основания. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания. Ответ дайте в градусах

Решение

$S_{бп} = \pi Rl; S_{осн} = \pi R^2$

Значит, $l : R = 2$.

Теперь рассмотрим осевое сечение, проведем высоту (ось). Получим прямоугольный треугольник, в котором катет (радиус основания) вдвое меньше гипотенузы, значит, угол при радиусе равен 60 градусам (см. рис.).

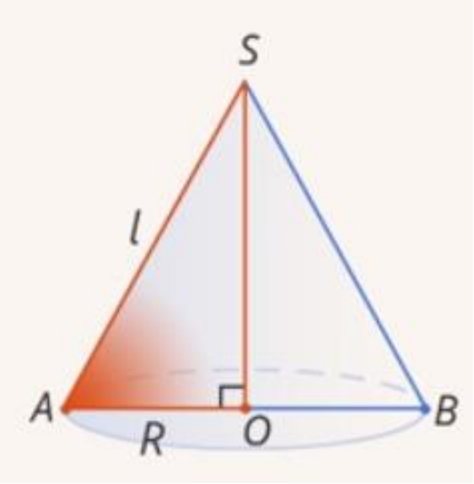


Рис. Иллюстрация к задаче

Ответ: 60 градусов.

Практическая работа №39

«Решение задач по теме «Шар. Сфера»

Пример. Стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5 см. Найти расстояние от центра сферы до плоскости ABC, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $CA = 15$ см

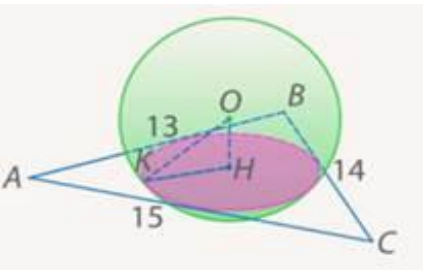


Рис. Иллюстрация к задаче

Решение

Зная радиус сферы, нужно найти расстояние от центра до плоскости. Для этого достаточно найти радиус окружности, полученной в сечении сферы плоскостью. Тогда из прямоугольного треугольника OHK (O – центр сферы, H – центр окружности сечения, K – точка на этой окружности) мы сможем найти искомое расстояние.

Найдем радиус окружности сечения. Она является вписанной для треугольника ABC. Воспользуемся формулой: $S = pr$. Тогда $r = \frac{S}{p}$;

$p = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ (см) – полупериметр.

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ (см^2).

Соответственно: $r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$ (см).

Найдем расстояние от центра сферы до плоскости.

Искомое расстояние – это катет треугольника OKH с гипотенузой 5 и другим катетом 4. Тогда легко показать, что $OH = 3$ см.

Ответ: расстояние от центра сферы до плоскости ABC равно 3 см.

Практическая работа №40

«Вычисление объема призмы. Вычисление объема цилиндра»

Пример.

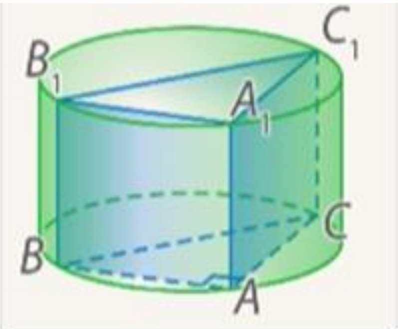


Рис. 7. Призма, вписанная в цилиндр

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\frac{5}{\pi}$. Найдите объемы призмы и цилиндра, описанного около этой призмы. (См. рис. 7.)

Решение. Объем призмы находится сразу (см. рис. 8).

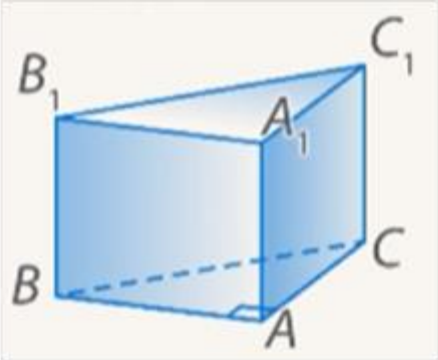


Рис. 8. Призма, данная по условию

$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot AA_1 = 24 \cdot \frac{5}{\pi} = \frac{120}{\pi}$.

Для того чтобы найти объем цилиндра, необходимо знать радиус его основания. Если цилиндр описан около призмы, то его радиусом будет радиус окружности, описанной около основания призмы. Основанием призмы является прямоугольный треугольник, тогда радиус окружности, описанной около него, будет равен половине гипотенузы.

По теореме Пифагора гипотенуза основания $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$,

а тогда радиус описанной окружности равен $R = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ – это и есть радиус основания цилиндра. Высота у него такая же, как и у призмы.

Имеем: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 h = 25\pi \cdot \frac{5}{\pi} = 125$.

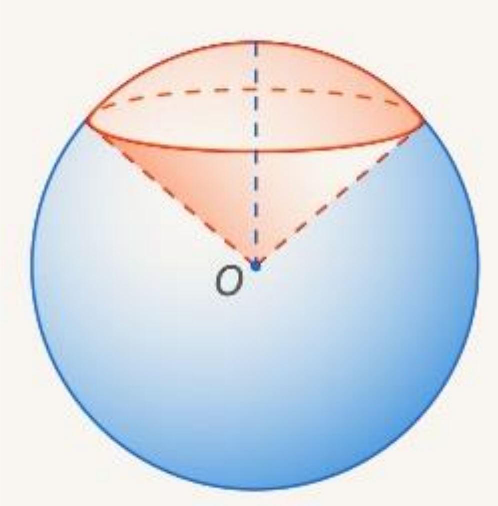
Ответ: $V_{\text{призмы}} = \frac{120}{\pi}$; $V_{\text{цил}} = 125$.

Практическая работа №41

«Вычисление объема шара, площади сферы»

Пример. Найдите объем шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота конуса, образующего сектор, составляет треть диаметра шара.

***Решение*:**



Шаровой сектор — это часть шара, ограниченная кривой поверхностью шарового сегмента и конической поверхностью, основанием которой служит основание сегмента, а вершиной — центр шара. Формула объема шарового сектора: V = (2/3)*πR²*h, где h - высота сегмента. В нашем случае R=H+h, где H - высота конуса, а h- высота сегмента. Тогда h = R-H = 6-4 =2, так как H = (1/3)*2*R (дано). Значит V = (2/3)*π*36*2 = 48π.
Ответ: объем шарового сектора равен 48π

Практическая работа №42

«Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел»

Пример. Чашка диаметром 8 см и высотой 10 см вмещает 0.5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды ?
Решение. Поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков (в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно, высота h новой чашки находится из отношения:

$(h / 10)^3 = 4 / 0.5$, то есть $h^3 = 8 \cdot 10^3$, откуда $h = 20$ см;

аналогично, для диаметра d получим:

$(d / 8)^3 = 4 / 0.5$, то есть $d^3 = 8 \cdot 8^3$, откуда $d = 16$ см .

Практическая работа №43

«Линейные операции над векторами»

Пример 1.

Даны векторы $\boldsymbol{A}$ = (-2; 3; 5) и $\boldsymbol{B}$ = (4; -1; 7). Найти координаты вектора 3$\boldsymbol{A}$ – 2$\boldsymbol{B}$.

Указание

При умножении вектора на число все его координаты

Умножаются на это число, при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.

Решение

3$\boldsymbol{A}$ = (-6; 9; 15), -2$\boldsymbol{B}$ = (-8; 2; -14).

3$\boldsymbol{A}$ – 2$\boldsymbol{B}$ = 3$\boldsymbol{A}$ + (-2$\boldsymbol{B}$) = (-6 - 8; 9 + 2; 15 – 14) = (-14; 11; 1).

***Ответ*:** 3$\boldsymbol{A}$ – 2$\boldsymbol{B}$ = (-14; 11; 1).

Пример 2.

При каких *A* И *B* векторы $\boldsymbol{A}$ = (*A*; 3; -5) и $\boldsymbol{B}$ = (1; -2; *B*) коллинеарны?

Указание

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Решение

Если $\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B}$, то $\frac{\alpha}{1} = \frac{3}{-2} = \frac{-5}{\beta}$. Отсюда:

1) $\frac{\alpha}{1} = \frac{3}{-2} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$ 2) $\frac{3}{-2} = \frac{-5}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{10}{3}$.

***Ответ*:** $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{10}{3}$. .

Практическая работа №44

«Угол между векторами. Скалярное произведение векторов»

Пример 1.

Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$,

если $|\overline{a}| = 2, \quad |\overline{b}| = 5, \quad \angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b})$. В данном случае:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $\overline{a}\overline{b} = 5\sqrt{3}$.

Пример 2.

Найти длину вектора $\overline{c} = -\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3, \quad |\overline{b}| = 2, \quad \angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение будет следующим:

$$|\overline{c}| \overset{(1)}{=} |-\overline{a} + 3\overline{b}| \overset{(2)}{=} \sqrt{(-\overline{a} + 3\overline{b})^2} \overset{(3)}{=} \sqrt{\overline{a}^2 - 6\overline{a}\overline{b} + 9\overline{b}^2} \overset{(4)}{=} \sqrt{|\overline{a}|^2 - 6 \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b}) + 9 \cdot |\overline{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{9 - 36 \cdot \frac{1}{2} + 36} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

1) Поставляем выражение вектора $\overline{c}$.

2) Используем формулу длины: $|\overline{v}| = \sqrt{\overline{v}^2}$, при этом в качестве вектора «вэ» у нас выступает целое выражение $-\overline{a} + 3\overline{b}$.

3) Используем школьную формулу квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Обратите внимание, как она здесь любопытно работает: $(-\overline{a} + 3\overline{b})^2 = (-\overline{a})^2 + 2 \cdot (-\overline{a}) \cdot 3\overline{b} + (3\overline{b})^2 = \overline{a}^2 - 6\overline{a}\overline{b} + 9\overline{b}^2$ – фактически это квадрат разности, и, по сути, так оно и есть. Желающие могут переставить векторы местами: $\sqrt{(-\overline{a} + 3\overline{b})^2} = \sqrt{(3\overline{b} - \overline{a})^2} = \sqrt{9\overline{b}^2 - 6\overline{a}\overline{b} + \overline{a}^2}$ – получилось то же самое с точностью до перестановки слагаемых.

4) Дальнейшее уже знакомо из двух предыдущих задач.

Ответ: $|\bar{c}| = 3\sqrt{3}$ ед. $\approx 5{,}20$ ед.

Практическая работа №45,№46

«Вычисление угла между векторами. Вычисление скалярного произведения векторов»

Пример 1.

Найти длину вектора $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, если $|\bar{a}| = 5, \quad |\bar{b}| = 10, \quad \angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.

Решение. Угол между векторами. Снова посмотрим на нашу формулу $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a}; \bar{b})$. По правилу пропорции сбросим длины векторов в знаменатель левой части:

$$\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \cos\angle(\bar{a}; \bar{b})$$

А части поменяем местами:

$$\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

В чём смысл данной формулы? Если известны длины двух векторов и их скалярное произведение, то можно вычислить косинус угла между данными векторами, а, следовательно, и сам угол.

Скалярное произведение $\bar{a}\bar{b}$ – это число? Число. Длины векторов $|\bar{a}|, |\bar{b}|$ – числа? Числа. Значит, дробь $\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$ тоже является некоторым числом X. А если известен косинус угла: $\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) = X$, то с помощью обратной функции легко найти и сам угол: $\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \arccos X$.

Пример 2.

Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно,

что $|\bar{a}| = 4, \quad |\bar{b}| = 2\sqrt{2}, \quad \bar{a}\bar{b} = 8$.

***Решение*:** Используем формулу:

$$\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

На заключительном этапе вычислений использован технический приём – устранение иррациональности в знаменателе. В целях устранения иррациональности я домножил числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$.

Итак, если $\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то:

$$\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Значения обратных тригонометрических функций можно находить по **тригонометрической таблице**. Хотя случается это редко. В задачах аналитической геометрии значительно чаще появляется какой-нибудь неповоротливый медведь вроде $\arccos\frac{5}{17}$, и значение угла приходится находить приближенно, используя калькулятор. Собственно, такую картину мы ещё неоднократно увидим.

***Ответ*:** $\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{\pi}{4}$ рад. $= 45°$

Практическая работа №47

«Понятие о задачах математической статистики»

Пример 1. Пусть ученик получил в течение года следующие отметки по математике: 5, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5. Какую четвертную отметку поставит ему учитель?

Решение. Многих школьников волнует подобная проблема, и чаще всего ученики решают ее следующим естественным образом: складывают все отметки и делят сумму оценок на их количество.

В нашем случае *(5 + 2 + 4 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5) / 10 = 4,4*

Число 4,4, которое получается в результате, называется **средним арифметическим**. Поскольку такую оценку в журнал ставить не принято, учитель, скорее всего, округлит ее до 4.

Пример 5. Дан числовой ряд, который представляет собой стоимость одного литра бензина на 10 автозаправочных станциях (в рублях):

32,2; 32,8; 33; 32,9; 33; 32,5; 32,8; 33; 33,2; 32,8.

Решение.

Найдем среднее арифметическое этих цен:

(32,2 + 32,8 + 33 + 32,9 + 33 + 32,5 + 32,8 + 33+ 33,2 + 32,8) / 10 = 32,82.

Самым естественным, на первый взгляд, кажется посчитать отклонение от среднего для каждого члена ряда и затем найти их среднее арифметическое:

((32,2 - 32,82) + (32,8 - 32,82) +(33- 32,82) + ... + (32,8 - 32,82)) / 10 = 0.

Мы получили нуль совсем не случайно: при вычислении «среднего разброса» по такой формуле часть отклонений входит в сумму со знаком «плюс», часть — со знаком «минус», а в сумме всегда получается нуль.

Какой же выход? Можно суммировать, например, модули отклонений — тогда уж нуля точно не будет. Иногда так и поступают, но с модулем не всегда удобно работать. Поэтому математики решили, что лучше складывать не модули отклонений, а их квадраты — они ведь тоже неотрицательные.

Так появилось понятие **дисперсии числового ряда**.

Дисперсией числового ряда называется среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего арифметического.

$$\mathbf{D} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Найдем дисперсию числового ряда из нашего примера с ценами на бензин. Среднее арифметическое мы уже вычислили — оно равно *32,82*.

Найдем теперь **дисперсию**, т. е. **среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего:**

$((32{,}2 - 32{,}82)^2 + (32{,}8 - 32{,}82)^2 + (33 - 32{,}82)^2 + \ldots + (32{,}8 - 32{,}82)^2) / 10 = 0{,}0736$.

2. Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

2.1. Перечень контрольных работ

№	Наименование контрольной работы	Кол-во часов
1	Тригонометрические функции	2
2	Степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические функции	2
3	Последовательности и функции. Дифференциальное и интегральное исчисления.	2
4	Интеграл. Решение уравнений, неравенств	2
5	Измерения в геометрии	2
6	Векторы в пространстве	2
7	Элементы комбинаторики, теории вероятностей, статистики	2

2.2. Рекомендации по выполнению контрольных работ

При подготовке к выполнению контрольных работ студент должен изучить соответствующие разделы по пособиям и учебникам (список литературы прилагается).

При выполнении работы и ее оформлении необходимо придерживаться следующих правил (работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студентам для переработки):

1) работа должна быть выполнена в тетради, имеющей поля для замечаний рецензента. Чернила можно использовать любого цвета, кроме красного;

2) на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер контрольной работы, название дисциплины; а также дата отсылки работы и адрес студента;

3) перед решением каждой задачи нужно привести полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера;

4) следует придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в задании, строго сохраняя при этом нумерацию примеров (задач);

5) в работу должны быть включены все задачи, указанные в задании по своему варианту. Не допускается замена задач контрольного задания другими. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются;

6) решения задач должны сопровождаться развернутыми пояснениями; нужно привести в общем виде все используемые формулы с объяснением употребляемых обозначений; объяснить и мотивировать все действия по ходу решения; сделать необходимые чертежи. Чертежи должны быть выполнены в прямоугольной системе координат в полном соответствии с данными условиями задач и теми результатами, которые получены;

7) если вычисления, выполняемые при решении задач, приближенные, то следует придерживаться правил приближенных вычислений;

8) после получения проверенной работы (как не зачтенной, так и зачтенной) студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты выполнить все рекомендации рецензента. Если работа получила в целом положительную оценку, но в ней есть отдельные недочеты (указанные

в рецензии в тетради), то нужно сделать соответствующие исправления и дополнения в той же тетради (после имеющихся решений и записи «Работа над ошибками») и предъявить на экзамене или собеседовании. Если работа не 4 зачтена, то ее необходимо в соответствии с требованиями рецензента частично или полностью переделать. Повторную работу надо выполнять в той же тетради (если есть место) или в новой тетради с надписью на обложке «Повторная», с указанием фамилии рецензента, которым работа была ранее не зачтена, и вместе с не зачтенной работой направить ее на новую проверку.

Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.

Проверенную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию преподавателя, студент представляет к защите.

Распределение контрольных работ по семестрам устанавливается вузом для студентов в соответствии с распределением по семестрам материала и сообщается студентам каждой специальности дополнительно.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить консультацию. При решении заданий контрольной работы можно использовать различные методы решений.

2.3. Задания контрольных работ

Контрольная работа № 1 по теме: "Тригонометрические функции."

Вариант 1.

1. Переведите из градусной меры угла в радианную и вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$:

а) 330^0 ; **б)** 150^0 ; **в)** 240^0 ; **г)** 135^0;

2. Упростите выражение используя формулы привидения:

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)$; **б)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$; **в)** $tg(\pi-t)$;

3. Преобразуйте сумму в произведение:

а) $\cos 75^0 + \cos 60^0$; **б)** $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$;

4. Преобразуйте произведение в сумму:

а) $\sin 14^0 * \cos 16^0$; **б)** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) * \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$;

5. Решить уравнение:

а) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; **в)** $\sin 12t - \sin 3t = 0$;

б) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **г)** $3 \sin^2 t - 5 \sin t - 2 = 0$.

Контрольная работа № 2 по теме: "Степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические функции."

Вариант 1.

1. Какие из перечисленных точек принадлежат графику функции

f(x) = 2x + 3 **?**

A(1;5), B(0;1), C(6;15), D(-1;0)

2. Вычислите:

а) *y = f(x)* является нечетной

2 f(-4) + f(3)

если *f(4)=1, f(-3)=2*

б) *y = f(x)* является четной

f(-3) + 2 f(1)

если *f(3)=4, f(-1)=2*

3. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$; б) $f(x)=\log_5\dfrac{6x-x^2}{x+2}$.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x-1}=x-2$; б) $\sqrt{8x^2+2x+8}=3x$.

5. Решите уравнение:

а) $\log_6(x^2-5)=\log_6 4x$.

6. Построить график функции, исследовать: $f(x)=2\sin(x)$

Контрольная работа № 3 по теме: "Последовательности и функции. Дифференциальные, интегральные исчисления"

Вариант 1.

1. Вычислить предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x$.

2. Вычислить производную функции:

$y=(x^3+1)\cdot\ln x$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y=x^4-4x+4$.

4. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int\frac{dx}{(4-3x)^2}$; б) $\int(3x+2)^5dx$.

5. Вычислить по формуле Ньютона-Лейбница определенный интеграл:

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{Cos^2x} - \frac{1}{Sin^2x}\right) dx.$

6. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

Контрольная работа № 4 по теме: "Решение уравнений, неравенств"

Вариант 1.

1. Решите показательные уравнения:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 9$;

б) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$;

в) $2 \cdot 25^x - 5^x - 1 = 0$.

2. Решите иррациональные уравнения:

а) $\sqrt[3]{x-2} = x - 2$;

б) $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$.

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2^{x-3y} = 16 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2y + y = 9 \\ y + x^2 = 9 \end{cases}$.

4. Решите иррациональные неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > 3$;

б) $\sqrt{24 - 10x} < 3 - 4x$.

5. Решите показательные неравенства:

а) $(\frac{1}{5})^{3-x} < 25$;

б) $0{,}6^{x^2+3x} \geq 1$

в) $(\frac{1}{4})^{x+4} \geq 8 \cdot \sqrt{2}$.

Контрольная работа № 5 по теме: «Измерения в геометрии»

Вариант 1

1. Найдите площадь полной поверхности и объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 10 см вокруг его оси симметрии, параллельной большей стороне.

2. Найдите площадь полной поверхности и объем тела, полученного при вращении прямоугольника с катетом 6 см и гипотенузой 10 см вокруг его катета.

3. Найдите объем шара и площадь его поверхности, если его радиус – 4 см.

4. Написать уравнение сферы радиуса 3 дм с центром в точке $A(1; –2; 5)$.

5. Радиусы двух шаров – 5 мм и 4 мм. Определите радиус шара, объем которого равен суммарному объему данных шаров.

6. Площадь поверхности куба с ребром 4 см равна площади поверхности сферы. Найти радиус сферы.

Контрольная работа № 6 по теме: "Векторы в пространстве"

Вариант 1.

1. Даны векторы a{-1;2;0}, b{0;-5;-2}, c{2;1;-3}. Найти векторы p=3b-2a+3c, к=3c-2b+a.

2. Даны точки A(3;-2;4), B(4;-1;2), C(6;-3;2), D(7;-3;1). Вычислить угол между вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

3. Определите вид треугольника ABC, если его вершины имеют координаты A(9;3;-5), B(2;10;-5), C(2;3;2).

4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Изобразите векторы, полученные при сложении:

а) $\overline{B_1C_1} + \overline{CD}$;   б) $\overline{DC} + \overline{DA} + \overline{BB_1}$;   в) $\overline{AC_1} + \overline{DA_1} + \overline{B_1B} + \overline{BA}$

5. Расскажите о правиле треугольника сложения двух векторов. Проиллюстрируйте это правило на рисунке.

Контрольная работа № 7 по теме: "Элементы комбинаторики, теории вероятностей, статистики"

Вариант 1.

1. Сколькими способами можно разместить на полке 5 книг?

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3?

3. В урне находится 4 белых и 5 красных шарика. Какова вероятность того, что наугад взятый шарик будет белый?

4. Найдите моду, медиану и среднее значение выборки: 3,3,5,3,5,2,3,6

5. Из 24 учащихся необходимо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

6. Из класса, в котором 15 девочек и 12 мальчиков жеребьёвкой выбирают команду численностью 14 человек. Какова вероятность того, что будут выбраны 9 девочек и 5 мальчиков?

3. Классификация ошибок

Грубыми считаются ошибки:

- незнание определения основных понятий, законов, правил, основных положений теории, незнание формул, общепринятых символов обозначений величин, единиц их измерения;
- незнание наименований единиц измерения;
- неумение выделить в ответе главное;
- неумение применять знания, алгоритмы для решения задач;
- неумение делать выводы и обобщения;
- неумение читать и строить графики;
- неумение пользоваться первоисточниками, учебником и справочниками;
- потеря корня или сохранение постороннего корня;
- отбрасывание без объяснений одного из них;
- равнозначные им ошибки;
- вычислительные ошибки, если они не являются опиской;
- логические ошибки.

К **негрубым ошибкам** следует отнести:

- неточность формулировок, определений, понятий, теорий, вызванная неполнотой охвата основных признаков определяемого понятия или заменой одного — двух из этих признаков второстепенными;
- неточность графика;
- нерациональный метод решения задачи или недостаточно продуманный план ответа (нарушение логики, подмена отдельных основных вопросов второстепенными);
- нерациональные методы работы со справочной и другой литературой;
- неумение решать задачи, выполнять задания в общем виде.

Недочетами являются:

- нерациональные приемы вычислений и преобразований;
- небрежное выполнение записей, чертежей, схем, графиков.

Выделенные требования, за какие умения можно ставить определенную оценку и четкое представление, что считается грубой ошибкой, а что недочетом, позволят преподавателю грамотно оценить студента.

4. Критерии оценки

Оценки за выполнение работ являются показателями текущей успеваемости студентов по дисциплине Математика.

Отметка «5» ставится, если:

работа выполнена полностью;

в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Отметка «3» ставится, если:

допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием учащимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

5. Список литературы

1. Алимов Ш.А. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10—11 классы. — м., 2016.

2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Математика: алгебра и начала Математического анализа. Геометрия. Геометрия (базовый и углубленный уровни). 10—11 Классы. — м., 2016.

3. Башмаков М.И. математика: учебник для студ. Учреждений сред. Проф. Образования. — М., 2016.

4. Башмаков М.И. математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. Пособие Для студ. Учреждений сред. Проф. Образования. — м., 2017.

5. Башмаков М.И. Математика: кн. Для преподавателя: метод. Пособие. — м., 2015

6. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10 класс / под ред. А.б. Жижченко. — м., 2017.

Интернет-ресурсы:

1. Www.fcior.edu.ru (информационные, тренировочные и контрольные материалы).

2. Www.school-collection.edu.ru (единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).