МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)
«РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ В Г. МИРНОМ»
«СВЕТЛИНСКИЙ ФИЛИАЛ ЭНЕРГЕТИКИ, НЕФТИ И ГАЗА»

РАССМОТРЕНО И РЕКОМЕНДОВАННО
К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ
на заседании МО
Протокол № 3
от « 08» ноября 2021 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

«ЕН.01 Математика» программы подготовки специалистов среднего звена по специальности среднего профессионального образования 21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений

Составитель: Нурмухаметов Р.И.
преподаватель общеобразовательных дисциплин

Светлый
2021 год

Аннотация

Методические рекомендации по выполнению практических работ разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее ФГОС) и на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика», которая является дисциплиной математического и общего естественнонаучного цикла для специальности среднего профессионального образования (далее СПО), 21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений.

В методических рекомендациях приведены основные требования по выполнению практических работ, предназначенных для обучающихся. Методические рекомендации предназначены для организации практических работ студентов в рамках реализации программ среднего профессионального образования

Содержание

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой по «Математике». Выполнение практических работ является одним из важнейших условий по реализации программы учебной дисциплины «Математика», является дисциплиной математического и общего естественнонаучного цикла основной профессиональной образовательной программы.

Выполнение аудиторных практических работ обучающихся в процессе изучения курса является важным в части систематизации и закрепления знаний; расширения и углубления теоретической подготовки обучающихся и овладения соответствующими навыками:

1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
2. Организовать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.
8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Целью выполнения практических работ является получение знаний и умений, которые необходимы для подготовки специалистов среднего звена, осознания необходимости продолжения образования, самореализации в разнообразных видах деятельности, а также в достижении успеха в различных сферах социальной жизни.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь:**

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить операции над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- решать системы линейных уравнений различными методами;

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать:**

- основные математические методы решения прикладных задач;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления;
- роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Критерии оценки выполнения обучающимися практических работ.

Оценка знаний студентов производится по пятибалльной системе.

Критерии оценки практических заданий.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки;
- правильно выполнено более 75% заданий.

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме;
- при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Отметка «1» ставится, если:

- работа показала полное отсутствие у обучающегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

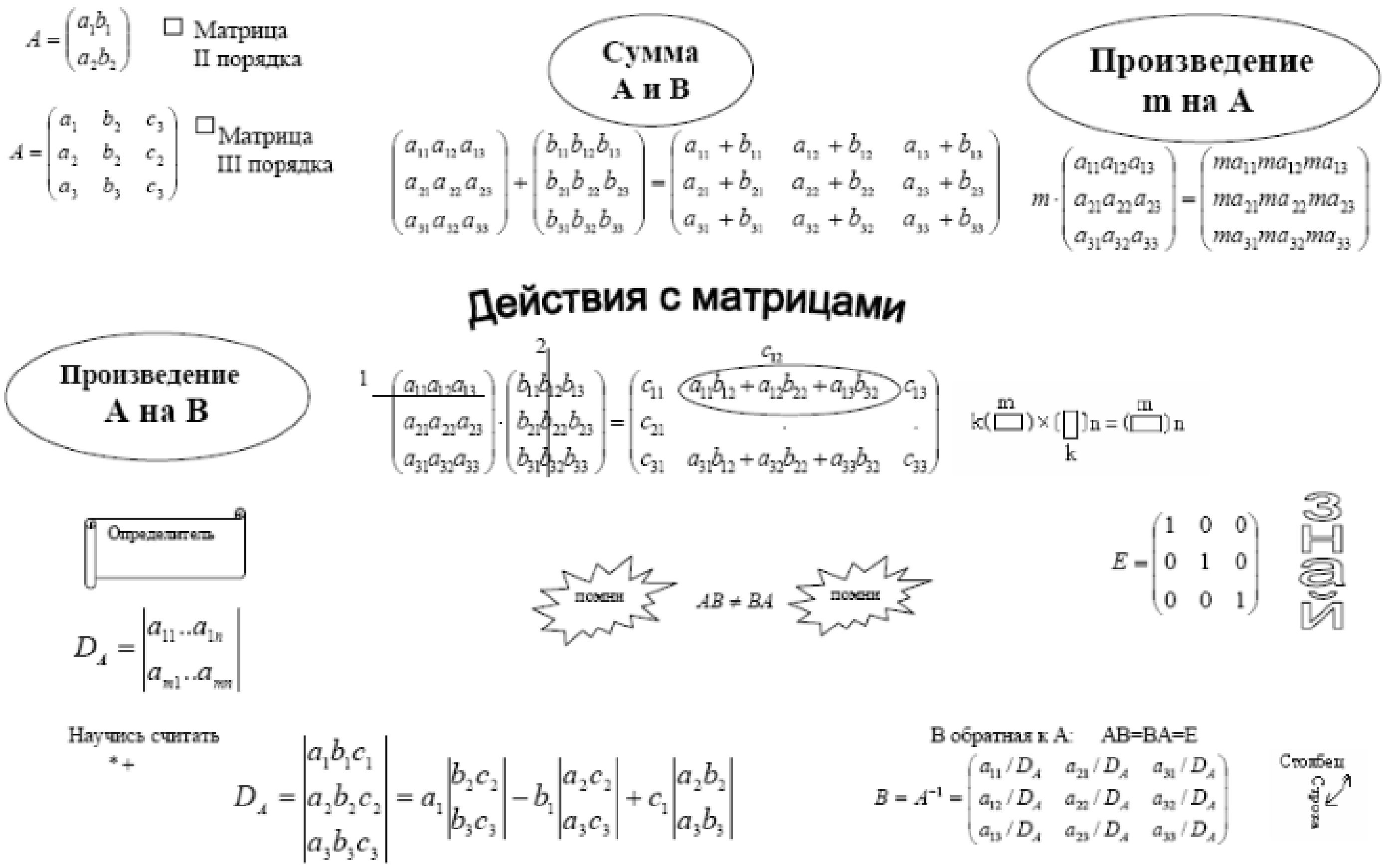
К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием обучающимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Выполнять пропущенные работы по уважительным и неуважительным причинам обучающийся может на дополнительных занятиях (согласно расписанию), в читальном зале или дома.

Практическая работа № 1-2
Матрицы и действия над ними. Вычисление определителей.



Вариант 1.

Тема: Матрицы и действия над ними. Вычисление определителей**Цель:** Отработать навыки действий с матрицами. Научиться находить матрицу обратную к данной, делать проверку с помощью единичной матрицы.

Ход работы.

1. Найти сумму матриц. $A=\begin{pmatrix}3&5&7\\2&-1&0\\4&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$.
2. Найти матрицу $C = 2A + 5B$, если $A=\begin{pmatrix}3&5\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}$.
3. Найти произведение матриц AB и BA, если $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу обратную к данной $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, сделать проверку.

Вариант 2.

Тема: Матрицы и действия над ними. Вычисление определителей.

Цель: Отработать навыки действий с матрицами. Научиться находить матрицу обратную к данной, делать проверку с помощью единичной матрицы.

Ход работы.

1. Найти сумму матриц. $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Найти матрицу $C = 4A + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
3. Найти произведение матриц AB и BA, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Найти матрицу обратную к данной $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, сделать проверку.

Вариант 3.

Тема: Матрицы и действия над ними. Вычисление определителей.

Цель: Отработать навыки действий с матрицами. Научиться находить матрицу обратную к данной, делать проверку с помощью единичной матрицы.

Ход работы.

1. Найти сумму матриц. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Найти матрицу $C = 5A + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Найти произведение матриц AB и BA, если $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу обратную к данной $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$, сделать проверку.

Вариант 4.

Тема: Матрицы и действия над ними. Вычисление определителей.

Цель: Отработать навыки действий с матрицами. Научиться находить матрицу обратную к данной, делать проверку с помощью единичной матрицы.

Ход работы.

1. Найти сумму матриц. $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу $C = 3A + 4B$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

3. Найти произведение матриц AB и BA, если $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу обратную к данной $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, сделать проверку.

Вычисление определителей

Примеры:

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}4 & 3\\ -5 & 6\end{vmatrix} = 4*6-(-5)*3 = 39$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \square$$

1 способ

$$\square = 4*2*2+10*2*4+(-2)*12*1-(1*2*4+4*2*12+10*(-2)*2) = 16+80-24-(8+96-40) =$$
$$= 72-64 = 8$$

2 способ

Прибавляя удвоенный второй столбец к первому ,затем к третьему столбцу и применяя формулу

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$, найдем

$$\square = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 11 & 2 & 12 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 14 & 2 & 16 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} 14 & 16 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2(84-80) = 8$$

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

Практическая работа № 3-4
Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка.
Нахождение обратной матрицы.

Цель:

-Проверить знание свойств определителей 2 и 3 порядков, правила вычисления определителей, вычислительные навыки

-Проверить умения нахождения миноров, алгебраических дополнений и определителей. Правило вычисления обратной матрицы.

Содержание

Определение 1. Матрицей размера 2 х 2 называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из 2 строк и 2 столбцов.

Числа, составляющие $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ эту матрицу, называются ее элементами и обозначаются буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй - номер столбца, в которых стоит данное число.

Определение 2. *Определителем (или детерминантом) второго порядка,* соответствующим данной матрице, называется число.

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

По определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}называются элементами определителя.

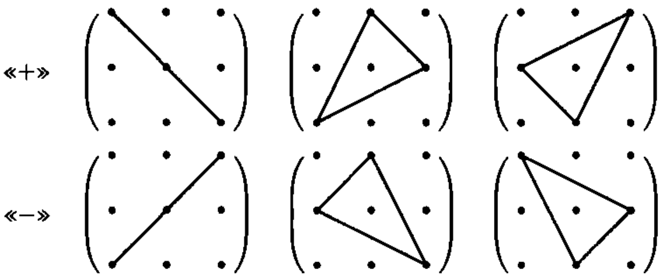
Определение 3. Аналогично, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ - квадратная матрица размера 3 x 3 ,

то соответствующим ей определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Правило «треугольников» (правило Саррюса)



Примеры:
Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)-(-3)\cdot 5 = -8+15 = 7$

2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(15-12)-2\cdot(6-9)+(8-15) = 9+6-7 = 8$

Разложение определителя по элементам строки и столбца

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком (-). Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} принято обозначать A_{ij}.

Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Определители третьего порядка, их вычисление

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ - квадратная матрица размера 3 x 3

Соответствующим ей определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{13} называются элементами первой строки определителя. Формула дает разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.
Определители третьего порядка обладают всеми свойствами определителей второго порядка.

Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (5 \cdot 2 - 0 \cdot 6) - 4 \cdot (0 - 1 \cdot 6) = 30 + 24 = 54$$

Нахождение обратной матрицы.

Определение. Квадратная матрица А называется вырожденной, если ее определитель равен нулю, и невырожденной, если ее определитель не равен нулю.

Определение. Если А - квадратная матрица, то обратной по отношению к А называется матрица, которая будучи умноженной, на А (как справа так и слева), дает единичную матрицу. Обозначается A^{-1} .

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Опр. Если обратная матрица A^{-1} существует, то матрица А называется обратимой.
Опр. Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется обращением матрицы.
Теорема: для того чтобы квадратная матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица была невырожденной, то есть, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

При условии $D = |A| \neq 0$ обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D} \end{vmatrix}$$

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1. Находят определитель матрицы А;

2. Находят алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы А и записывают новую матрицу;

3. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонирую матрицу);

4. Умножают полученную матрицу на $\frac{1}{D}$

Задания:

1.) Вычислить определитель

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} a+b & a & c \\ a+c & b & c \\ a & 1 & c \end{vmatrix}$

2.) **Дана матрица** $A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти

$a) A^{-1}$ *и проверить, что* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$б)\ A + A^{-1}$

Вариант	κ_1	κ_2	***Вариант***	κ_1	κ_2
1	3	-2	***6***	1	5
2	4	1	***7***	-2	3
3	3	-4	***8***	6	-2
4	2	1	***9***	-6	1
5	3	-3	***10***	-5	1

Практическая работа № 5-6

Решение систем линейных уравнений

Цель: Проверить умения учащихся решать системы линейных уравнений по правилу Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (матричным методом).

Задание:
Решить системы уравнений:

а) по формуле Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$

Практическая работа№ 7-8

Тема: Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности

Цель: сформировать умение находить пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе.

Число *A* называют *пределом функции* *f*(*x*) при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0,$ зависящее от , такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} = \frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$$

Примеры решения:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию

1)Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

1) деление на x в старшей степени:

Пример 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}\quad \frac{\infty}{\infty}$$

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени**.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$ Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}}{\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}+3}=\frac{2}{3}$$

<u>Пример 2:</u>

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень в числителе: 3

Максимальная степень в знаменателе: 4

Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{7}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{15}{x^2}}+\overset{\to 0}{\frac{9}{x^3}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^4}}}{5+\overset{\to 0}{\frac{6}{x^2}}-\overset{\to 0}{\frac{3}{x^3}}-\overset{\to 0}{\frac{4}{x^4}}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

<u>Пример 3</u>

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

2. Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

1) разложение числителя и знаменателя на множители.

Пример 4

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$2x^2-3x-5=0$

Сначала находим дискриминант:

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$ Далее находим корни:

$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$ $x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ Таким образом:

$$2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$ можно сократить на $(x+1)$:

$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$ Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела: $=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=-2-5=-7$$

2) умножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

Пример 5

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Найти предел

Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$(*) = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

Применяем вверху формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$(*) = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*) = \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{3+6} + \sqrt{10 \cdot 3 - 21})} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{9} + \sqrt{9})} = \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (3+3)} =$$
$$= \frac{1}{6} \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{5x-15} = (*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе:

$$(*) = \frac{1}{6} \lim_{x\to 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

Решение данного примера в чистовом варианте выглядит так:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*) = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 3} \frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3} + \sqrt{10x-21}^{\to 3})} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30}\lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(x-3)} =$$

$$= \frac{1}{30}\lim_{x\to 3} \frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}$$

3) использование 1-го замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

<u>Пример 6</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3x}$

Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$.В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом 7x, значит, в знаменателе тоже нужно получить 7x».

А делается это очень просто:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$$

<u>Пример 7</u>

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}} = 5\cdot 2\cdot 2 = 20$$

<u>Пример 8</u>

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg 2x}{2x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

<u>Пример 9</u>

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

Пример 10

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}=\frac{\infty\cdot 0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^{\to 1}\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x^{\to 0}+5)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x}=$$
$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot 3x\cdot 3x\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{5}$$

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

Справка: $e=2{,}718281828...$ ***– это иррациональное число.***

В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

Пример 11

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$ Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha=3x$, значит, в показателе тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

страшная степень превратилась в симпатичную букву e :

При этом сам значок предела перемещаем в показатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

е (2-ой замечательный предел)

Содержание практической работы.

1. **Вычислить пределы функции:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-5x+1}{8x^2-9x+1} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-9x}{6x^3-x+1} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{5x^4+1}{8x^2-11x+1}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3\sqrt{x}}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{3x^2-13x+4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^3-x^2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$$

2. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{7x}{tg2x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{5x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{\sin 2x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{tg9x} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

Практическая работа № 9-10

Применение производной в физике и технике.

Цели:

- Повторить, обобщить и систематизировать знания о физическом смысле первой и второй производной.
- Закрепить навыки нахождения производных.
- Способствовать выработке навыков в применении производной к решению задач.
- Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

Теоретическая часть.

1. В чём заключается механический смысл производной?

Ответ. Производная функции y = f(x), в точке x_0, выражает скорость изменения функции в этой точке.

2. Если функция задана законом прямолинейного движения S = S(t), то S' (t) –?

Ответ. Скорость движения в момент времени t - это производная по перемещению S' (t) = v(t)

3. Что есть вторая производная от закона движения?

Ответ. Скорость изменения скорости этого движения, т.е. ускорение a(t) = v' (t) = S' ' (t).

С физической точки зрения дифференцирование – определение скорости изменения переменной величины. Производная, таким образом, играет роль скорости изменения зависимой переменной *y* по отношению к изменению независимой переменной *x*.

Выясняем формулы из физики, где используется производная.

- ✓ υ(t) = x'(t) – скорость.
- ✓ a(t) = υ'(t) – ускорение.
- ✓ I(t) = q'(t) – сила тока.
- ✓ c(t) = Q'(t) – теплоемкость.
- ✓ d(l) = m'(l) – линейная плотность.
- ✓ K(t) = l'(t) – коэффициент линейного расширения.
- ✓ ω(t) = φ'(t) – угловая скорость.
- ✓ e(t) = ω'(t) – угловое ускорение.

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности.

- ✓ N(t) = A'(t) – мощность.
- ✓ F(x)= A'(x) – Сила есть производная работы по перемещению.
- ✓ E = Ф'(t) – ЭДС индукции F = p'(t) – 2 закон Ньютона.

Примеры применения производной в физике	
Задача	Решение
Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+t+1$. 1. Какова кинетическая энергия тела в конце 3 сек. после начала движения тела? 2. Какова сила, действующая на тело?	1. $W_к = (m\cdot v^2)/2$ x ' (t) = v (t) = 2t+1, v (3) = 7, a(t)= v' (t) = 2, $W_к = (4\cdot 7^2)/2=98$ 2. F = ma, a(t) = v' (t) = x' ' (t), x ' (t) = v (t) = 2t+1, a(t)= v' (t) = 2, F = ma = 4·2 = 8 Н.
Угол поворота тела вокруг оси изменяется по закону $\varphi(t)=0,1t^2-0,5t+0,2$. Найти угловую скорость вращения тела в	ω(t) = φ'(t) φ'(t) = 0,2t-0,5 ω(t) = 0,2t-0,5 ω(20) = 3,5

момент времени t=20с.	
Для любой точки С стержня АВ длиной 10 см, масса куска стержня АС определяется по формуле $m(l)=3l^2+5l$. Найти линейную плотность стержня в середине отрезка АВ, в конце отрезка.	$d(l) = m'(l)$ $m'(l) = 6l+5$ $d(l) = 6l+5$ $d(5) = 6\cdot5+5=35$ – в середине отрезка $d(10) = 6\cdot10+5=65$ – в конце отрезка
Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента времени t=0, задаётся формулой $q=3t^2-3t+4$. Найти силу тока в конце 6-й секунды.	$I(t) = q'(t)$ $q'(t) = 6t-3$ $I(t) = 6t-3$ $I(6) = 6\cdot6-3=33$

Практическая часть.

1.Найти необходимые величины.

1.1 $S(t)=2t^4+3t^2-t+\sqrt{t^3}$ $v(t), a(t)$-?	1.6 $S(t)=12t^2-(2/3)t^3$ $v(t), a(t)$-?	1.11 $S(t)=21t+2t^2-(1/3)t^3$ $v(t), a(t)$-?
1.2 $S(t)=5\sin(3t+1)$, $v(t)$-?	1.7 $S(t)=6\cos(0{,}5t-4)$, $v(t)$-?	1.12 $S(t)=0{,}5\sin(4t+2)$, $v(t)$-?
1.3 $x(t)= - 4t^2+2t+2$, $v(1)$-?	1.8 $x(t)= \sqrt{t}+2t^2 - 3t+2$, $v(25)$-?	1.13 $x(t)=(-1/3)t^3+2t^2+5t$, $v(2)$-?
1.4 $x(t)=t^3-4t^2$, $a(5)$ -?	1.9 $x(t)=0{,}25t^4-2t^2$, $a(1)$ -?	1.14 $x(t)=t^5+3t^2-1$, $a(2)$ -?
1.5 $x(t)=(-1/6)t^3 +3t^2 – 5$, *найти t, когда* $a(t)=0$	1.10 $x(t)=2t^3+t-1$, *найти t, когда* $a(t)=2$	1.15 $x(t)= (-1/3)t^3+2t^2+5t$, *найти t, когда* $v(t)=0$

2. Решить задачу.

2.1 Найти силу $\boldsymbol{F}$, действующую на материальную точку с массой $\boldsymbol{m}$, движущуюся прямолинейно по закону $s(t) = 2t^3-t^2$, при $t=2$.

2.2 Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+t+1$. Найти действующую на тело силу $\boldsymbol{F}$, кинетическую энергию тела через ***2с*** после начала движения.

2.3 Маховик, задерживаемый тормозом, за время t поворачивается на угол $\varphi(t)=4t-0{,}3t^2$. Найти угловую скорость $\omega(t)$ вращения маховика в момент времени ***2 с***.

2.4 Точка движется по закону $x(t)=\sqrt{t}$. Найти её скорость в момент времени ***4с***.

2.5 Найти скорость тела, движущегося по закону $s(t)=3t+5$.

2.6 Тело движется прямолинейно по закону $s(t)=2t^2-t+4$. Найти скорость тела в моменты времени $t_1=0$, $t_2=2$, $t_3=5$ ***с***.

2.7 Найти скорость движения точки в момент времени ***t=5c***, если закон движения задан формулой ***$s(t)=3t^2-2t+5$***.

2.8 Тело движется прямолинейно по закону s***$(t)=1-2t+t^3$***. Найти скорость и ускорение в момент времени ***t=3c***.

2.9 Найти скорость и ускорение движения тела в момент времени ***t=2c***, если закон движения задан формулой ***$s=4t^2-3$***.

2.10 Когда скорость точки, движущейся прямолинейно по закону ***$s(t)=t^2-4t+5$***, равна 0?

2.11 Сила тока изменяется по закону ***$I=0,4t^2$*** . Найти скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды.

2.12 Изменение силы тока в зависимости от времени задано уравнением ***$I = 2t^2-5t$***. Найти скорость изменения силы тока в конце 10-й секунды.

2.13 Количество теплоты Q, получаемое некоторым веществом при нагревании определяется по формуле ***$Q=10t+0,5t^2$***. Найти теплоёмкость этого вещества при ***20 К***.

2.14 Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени задан уравнением ***$T=0,3t^2$***. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени ***10 с***.

2.15 Температура тела изменяется по закону ***$T(t)=0,5t^2-2t$***. С какой скоростью нагревается тело в момент времени ***t=6c.***

Практическая работа № 11-12

Применение производной к исследованию функции и построения графика

Цель: формирование умений исследовать функции при помощи производной, применять производную при решении задач на максимум и минимум.

Методические указания для практической работы

Теоретические сведения

1. Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Как возрастающие , так и убывающие функции называются монотонными, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - *промежутками монотонности*.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной:

если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает в этом промежутке;

если в некотором промежутке $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом промежутке.

Пример 1. Найти промежутки монотонности следующих функций:

а) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ б) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

а) Находим производную: $f'(x) = 2x - 8$, имеем $2x - 8 = 0 \iff x = 4$.

Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty < x < 4$	4	$4 < x < \infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Таким образом, данная функция в промежутке $-\infty < x < 4$ убывает,

а в промежутке $4 < x < \infty$ возрастает.

б) $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $(3x^2 - 12x = 0) \iff \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Составим таблицу:

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < 4$	4	$4 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Итак, в промежутках $-\infty < x < 0$ и $4 < x < \infty$ функция возрастает, а в промежутке $0 < x < 4$ - убывает.

2. *Исследование функции на экстремум с помощью первой производной*

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой минимума* этой функции, если существует такая δ – окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой максимума* этой функции, если существует такая δ – окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках – *минимумом* и *максимумом* (или *экстремумами*) функции.

Точками экстремумами могут служить только *критические точки*, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум: минимум в том случае, когда производная меняет знак с минуса на плюс, и максимум – когда с плюса на минус. Если же при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знака, то функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума.

3. *Правило нахождения экстремумов функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *с помощью первой производной*

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

IV. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 2. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $f(x) = x^2 - 4x$ б) $f(x) = x^3 - 3x^2$

а) Находим $f'(x) = 2x - 4$, приравняем производную к нулю, имеем $2x - 4 = 0$. Получим единственную критическую точку $x = 2$.

Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty < x < 2$	*2*	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	-	*0*	+
$f(x)$	↘	*Минимум* $f_{min}(x) = f(2) = -4$	↗

$f_{min}(x) = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

График функции $f(x) = x^2 - 4x$ есть парабола. Точка минимума (2;-4) является вершиной параболы.

б) Находим $f'(x) = 3x^2 - 6x$, приравняем производную к нулю, имеем $3x^2 - 6x = 0$. Получим две критические точки $x = 0$ и $x = 2$.

Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty < x < 0$	*0*	$0 < x < 2$	*2*	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	*0*	-	*0*	+
$f(x)$	↗	*Максимум* $f_{max}(x) =$ $= f(0) = 0$	↘	*Минимум* $f_{min}(x) =$ $= f(2) = -4$	↗

$f_{max}(x) = f(0) = 3 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0 = 0$

$f_{min}(x) = f(2) = 3 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = -4$

4. Наименьшее и наибольшее значения функции

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

1) Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
2) Найти значения функции на концах промежутка;
3) Сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ в промежутке $0 \leq x \leq 3$.

Имеем $f'(x) = 2x - 4$; $2x - 4 = 0$, т.е. $x = 2$ - критическая точка. Находим $f(2) = -1$; далее, вычисляем значения функции на концах промежутка: $f(0) = 3$, $f(3) = 0$.

Итак, наименьшее значение функции равно - 1 и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение равно 3 и достигается на левом конце промежутка.

5. Построение графиков функций

Общая схема построения графиков функций

I. Найти область определения функции.
II. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
III. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
IV. Найти асимптоты графика функции.
V. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
VI. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
VII. Построить график, используя полученные результаты исследования.

Пример 4 . Построить график функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

1. Функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y) = R$.
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.
3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: полагая $x = 0$, получим $y = -3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.
4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.
5. Найдем производную: $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Далее, имеем ($3x^2 - 12x + 9 = 0) \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 1 \\ x = 3 \end{matrix}\right.$.

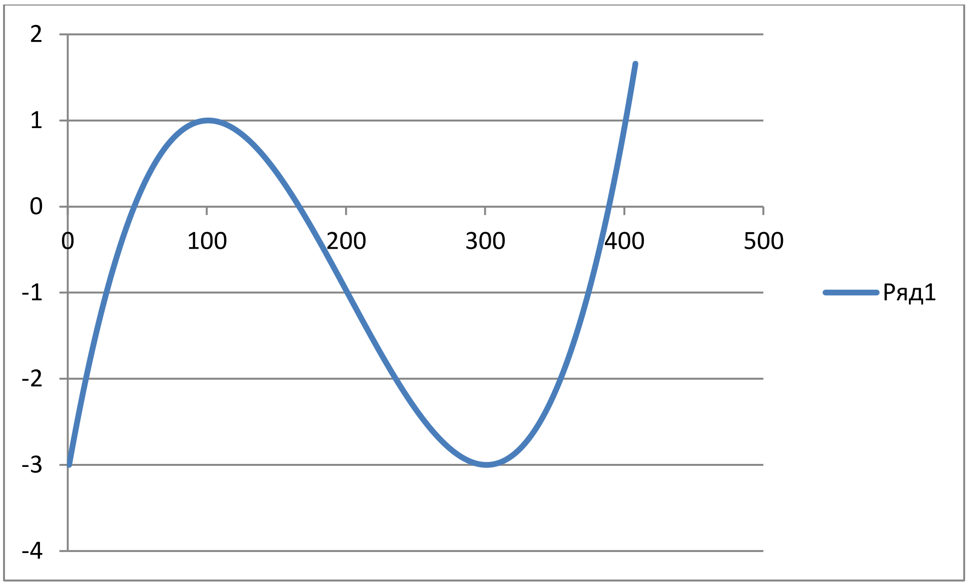
Точки $x = 1$ и $x = 3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$, $3 < x < \infty$. В промежутках $-\infty < x < 1$ и $3 < x < \infty$ $y' > 0$, то есть функция возрастает, а в промежутке $1 < x < 3$ $y' < 0$, то есть функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 3$ - с минуса на плюс. Значит, $y_{max} = y(1) = = 1$, $y_{min} = y(3) = -3$.

6. Найдем вторую производную: $y'' = 6x - 12$; $6x - 12 = 0$, $x = 2$. Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка $-\infty < x < 2$ и $2 < x < \infty$. В первом из них $y'' < 0$, а во втором

$y'' > 0$, то есть в промежутке $-\infty < x < 2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2 < x < \infty$ выпукла вниз. Таким образом, получим точку перегиба (2;-1).

7. Используя полученные данные, строим искомый график.

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$



Задания
Вариант 1.

1) Найдите промежутки монотонности функции $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$.
2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции:

$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{3}$ на отрезке $-2 \leq x \leq 2$.

3) Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:

   а) $y = x^3 + 3x^2$; б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

4) Дан закон прямолинейного движения точки $s = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1$

(t - в секундах, s - в метрах). Найдите максимальную скорость движения этой точки.

5) Исследуйте функцию и постройте ее график:

$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$.

Вариант 2.

1) Найдите промежутки монотонности функции $y = x^4 - 4x + 4$.
2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 4$ на отрезке $-4 \leq x \leq 2$.

3) Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:

   а) $y = x^3 - 12x^2 + 145$; б) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$.

4) Дан закон прямолинейного движения точки $s = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 5t + 3$ (t - в секундах, s - в метрах). Найдите максимальную скорость движения этой точки.
5) Исследуйте функцию и постройте ее график:

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$.

Практическая работа № 13-14
Интегрирование функций

Цель работы:

На конкретных примерах научиться находить неопределенный интеграл непосредственно с помощью таблицы интегралов.

Содержание работы:

Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл функции $y = f(x)$ - это совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$. Обозначается символом $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $\int$ - знак интеграла (это стилизованная латинская буква S, означающая суммирование; $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; C – постоянная интегрирования, способная принимать любое значение; x –переменная интегрирования).

Интегрирование – это отыскание первообразной по ее производной. Это действие, обратное дифференцированию.

<u>*Основные способы интегрирования*</u>

1. Метод непосредственного интегрирования, который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду.
2. Метод замены переменной (метод подстановки).
3. Метод интегрирования по частям.

Метод непосредственного интегрирования

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctgx + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tgxdx = \ln\lvert\cos x\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$	10. $\int e^x\,dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos xdx = \sin xdx$	11. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	

Метод непосредственного интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример 1: Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x)dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x)dx = \int x^3 dx - 3\cdot\int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C =$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}\cdot x^2 - \cos x + C$$

Пример 2: Вычислите $\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx = \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{2x}{x}dx - \int \frac{x^2}{x}dx = 3\cdot\int \frac{dx}{x} + 2\cdot\int dx - \int xdx = 3\ln x + 2x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + c$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл методом подстановки.

Содержание работы:

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Применим подстановку $x=\varphi(t)$,

где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $f(x) = f[\varphi(t)]$, $dx=\varphi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле.*

Пример 1: Вычислить $\int (3x-4)^3 dx$

Решение: Введем новую переменную *t = 3x-4*, тогда $dt = t'\cdot dx = (3x-4)'\cdot dx = 3dx$, откуда $dx = \frac{dt}{3}$. Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения *3x-4* подставим *t*, вместо dx подставим $\frac{dt}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx = \int t^3\cdot\frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо *t* подставим выражение *3x-4*), получим окончательный ответ.

$$\int (3x-4)^3 dx = \frac{(3x-4)^4}{12} + C$$

Пример 2. **Найти** $\int (5x^3-2)^{10} x^2 dx$.

Решение. **Применим способ подстановки. Пусть** $5x^3-2=t$, **найдем дифференциал:** $(5x^3-2)'dx = t'dt$. $15x^2dx = dt$, $x^2dx = \frac{dt}{15}$,

Данный интеграл перепишем следующим образом:

$$\int (5x^3-2)^{10} dx = \int t^{10} \frac{dt}{15} = \frac{1}{15}\int t^{10} dt = \frac{1}{15}\cdot\frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{165}t^{11} + C,$$

но $t = 5x^3-2$ **следовательно,**

$$\int (5x^3-2)^{10} x^2 dx = \frac{1}{165}(5x^3-2)^{11} + C$$

Ответ: $\int (5x^3-2)^{10} x^2 dx = \frac{1}{165}(5x^3-2)^{11} + C$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1		**Вариант 2**	
«3»	**«4-5»**	**«3»**	**«4-5»**
а) $\int \frac{5dx}{1+x^2}$	а) $\int \frac{3+2x-x^2}{x}$	а) $\int \frac{3dx}{1+x^2}$	а) $\int \frac{x^2-7x+12}{x}$
б) $\int (x^3-3x+\sin x)dx$	б) $\int \frac{5-2\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}}$	б) $\int (x^4-2x+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$	б) $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}$
в) $\int (2x+1)^4$	в) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2+e^x}}$	в) $\int (3x-4)^3$	в) $\int \frac{\sin x dx}{2+3\cos x}$
г) $\int \sin 3x dx$	г) $\int \frac{\cos t dt}{\sqrt[3]{1+\sin x}}$	г) $\int \sin 2x dx$	г) $\int \frac{2e^t dt}{(2+e^t)^2}$

Практическая работа № 15-16

Тема: Решение прикладных задач с помощью интеграла.

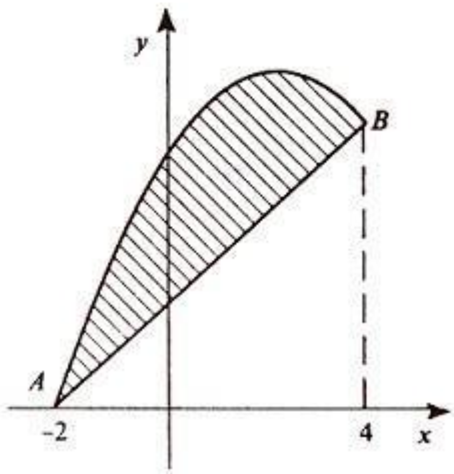
Цель: Отработать навыки нахождения определенного интеграла для решения задач прикладного характера.

Примеры.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x+2$, $y = 2x - \frac{x^z}{2} + 6$.

Решение. Находим точки пересечения заданных линий.

Для этого решаем систему уравнений: $\begin{cases} y = x+2 \\ y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 6 \end{cases}$



Для нахождения абсцисс точек пересечения заданных линий решаем уравнение: $x+2 = 2x - \dfrac{x^z}{2} + 6$ или $x^2 - 2x - 8 = 0$.

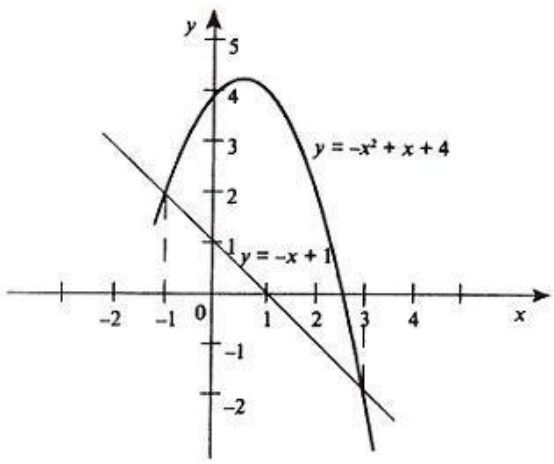
Находим: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Итак, данные линии, представляющие собой параболу и прямую, пересекаются в точках A(-2; 0), B(4; 6).

Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой вычисляем по указанной выше формуле:

$$S = \int_{-2}^{4}\left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2\right)dx = \int_{-2}^{4}\left(x - \frac{x^2}{2} + 4\right)dx.$$

По формуле Ньютона-Лейбница находим:

$$S = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{4} = \frac{16}{2} - \frac{64}{6} + 16 - \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + 8 = 18.$$



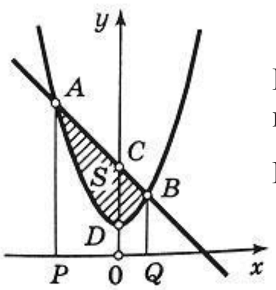
Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + x + 4$ и $y = -x + 1$.

Решение. Найдем точки пересечения линий $y = -x^2 + x + 4$, $y = -x + 1$, приравнивая ординаты линий: $y = -x^2 + x + 4 = -x + 1$ или $x^2 - 2x - 3 = 0$.
Находим корни $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ и соответствующие им ординаты $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

По формуле площади фигуры получаем

$$S = \int_{-1}^{3}\left(\left(-x^2 + x + 4\right) - \left(-x + 1\right)\right)dx = \int_{-1}^{3}\left(-x^2 + 2x + 3\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \left(-9 + 9 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3}$$



Пример 3. Определить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $x + y = 3$.

Решение.

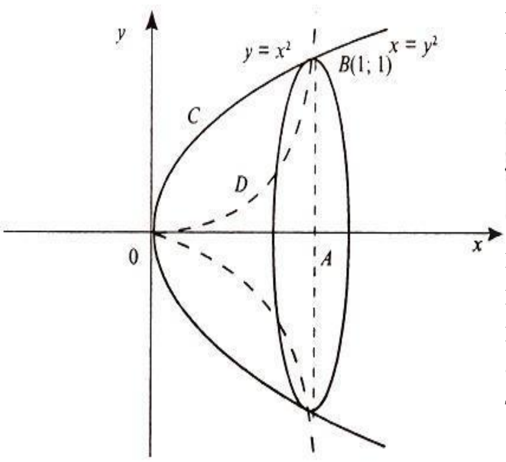
Решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ находим абсциссы точек пересечения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

Полагая $y_2 = 3 - x$ и $y_1 = x^2 + 1$, на основании формулы $S = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$ получаем

$$S = \int_{-2}^{1} \left((3-x) - (x^2+1)\right)dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = 4{,}5$$

Пример 4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $x = y^2$.



Решение.

Решим систему уравнений

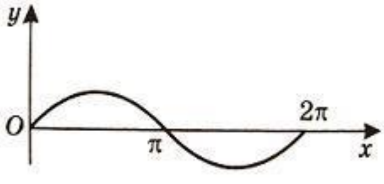
$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x, \end{cases} \quad x^4 = x, \quad x^4 - x = 0, \quad x(x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

и получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, откуда точки пересечения кривых O(0; 0), B(1; 1). Как видно на рисунке, искомый объем тела вращения равен разности двух объемов, образованных вращением вокруг оси Ох криволинейных трапеций OCBA и ODBA:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 x dy - \pi\int_0^1 x^4 dy = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

Пример 5. Вычислить площадь, ограниченную осью Ох и синусоидой $y = \sin x$ на отрезках:

а) $[0, \pi]$; б) $[0, 2\pi]$.



Решение.

а) На отрезке $[0, \pi]$ функция $\sin x$ сохраняет знак, и поэтому по формуле $S = \int_a^b y dx$, полагая $y = \sin x$, находим

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

.

б) На отрезке $[0, 2\pi]$, функция $\sin x$ меняет знак. Для корректного решения задачи, необходимо отрезок $[0, 2\pi]$ разделить на два $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$, в каждом из которых функция сохраняет знак.

По правилу знаков, на отрезке [π, 2π] площадь берется со знаком минус.

В итоге, искомая площадь равна

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) =$$

$$= -(-1-1) + (1-(-1)) = 4$$

Задания для самостоятельной работы по теме:

Вариант 1.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 3$, $y = x - \frac{x^z}{2} + 4$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x + 4$ и $y = x - 1$.
3. Определить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 + 5$ и прямой $x + y = 6$.
4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $x = 9y^2$.
5. Вычислить площадь, ограниченную осью Ox и синусоидой $y = \cos x$ на отрезках:

а) [0, π]; б) [0, 2π].

6. Задача на вычисление работы силы упругости:

Сжатие $\boldsymbol{x}$ винтовой пружины, пропорционально приложенной силе $\boldsymbol{F}$. Вычислить работу силы $\boldsymbol{F}$ при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила равная 10 Н.

(При решении задачи воспользуйтесь формулой $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$. Для нахождения $\boldsymbol{F(x)}$ воспользуйтесь законом Гука $\boldsymbol{F = kx}$).

Вариант 2.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 2$, $y = \frac{1}{2}x - x^2 + 4$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4x + 4$ и $y = x - 1$.
3. Определить площадь, ограниченную параболой $y = 2x^2 + 1$ и прямой $x + y = 1$.
4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = 4x^2$ и $x = y^2$.
5. Вычислить площадь, ограниченную осью Ox и синусоидой $y = \cos x$ на отрезках:

а) [0, π]; б) [0, 2π].

6. Задача на вычисление работы силы упругости:

Сжатие x винтовой пружины, пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила равная 20 Н.

(При решении задачи воспользуйтесь формулой $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$. Для нахождения $F(x)$ воспользуйтесь законом Гука $F = kx$).

Вариант 3.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 3$, $y = -x + \frac{x^z}{2} - 4$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + x + 4$ и $y = x - 1$.
3. Определить площадь, ограниченную параболой $y = 3x^2 + 5$ и прямой $x + y = 4$.
4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболами $y = 9x^2$ и $x = 4y^2$.
5. Вычислить площадь, ограниченную осью Ох и синусоидой $y = \cos x$ на отрезках:

а) $[0, \pi]$; б) $[0, 2\pi]$.

6. Задача на вычисление работы силы упругости:

Сжатие x винтовой пружины, пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила равная 15 Н.

(При решении задачи воспользуйтесь формулой $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$. Для нахождения $F(x)$ воспользуйтесь законом Гука $F = kx$).

Вариант 4.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 6$, $y = 2x - \frac{x^z}{2} + 4$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 10x + 25$ и $y = x + 5$.
3. Определить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 – 5$ и прямой $x – y = 6$.
4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболами $y = 3x^2$ и $x = 4y^2$.
5. Вычислить площадь, ограниченную осью Ох и синусоидой $y = \cos x$ на отрезках:

а) $[0, \pi]$; б) $[0, 2\pi]$.

6. Задача на вычисление работы силы упругости:

Сжатие $\boldsymbol{x}$ винтовой пружины, пропорционально приложенной силе $\boldsymbol{F}$. Вычислить работу силы $\boldsymbol{F}$ при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила равная 10 Н.

(При решении задачи воспользуйтесь формулой $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$. Для нахождения $\boldsymbol{F(x)}$ воспользуйтесь законом Гука $\boldsymbol{F = kx}$).

Вариант 5.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 3$, $y = x - \frac{x^z}{2} + 4$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x + 4$ и $y = x - 1$.
3. Определить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 + 5$ и прямой $x + y = 6$.
4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболами $y = 2x^2$ и $x = 4y^2$.
5. Вычислить площадь, ограниченную осью Ох и синусоидой $y = \cos x$ на отрезках:

а) $[0, \pi]$; б) $[0, 2\pi]$.

6. Задача на вычисление работы силы упругости:

Сжатие $\boldsymbol{x}$ винтовой пружины, пропорционально приложенной силе $\boldsymbol{F}$. Вычислить работу силы $\boldsymbol{F}$ при сжатии пружины на 0,05 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила равная 15 Н.

(При решении задачи воспользуйтесь формулой $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$. Для нахождения $\boldsymbol{F(x)}$ воспользуйтесь законом Гука $\boldsymbol{F = kx}$).

Вариант 6.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями , .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями и $y = x - 1$.
3. Определить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 + 2$ и прямой $x - y = 1$.
4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболами $y = 2x^2$ и $x = 4y^2$.
5. Вычислить площадь, ограниченную осью Ох и синусоидой $y = \cos x$ на отрезках:

а) $[0, \pi]$; б) $[0, 2\pi]$.

6. Задача на вычисление работы силы упругости:

Сжатие x винтовой пружины, пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила равная 20 Н.

(При решении задачи воспользуйтесь формулой $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$. Для нахождения $F(x)$ воспользуйтесь законом Гука $F = kx$).

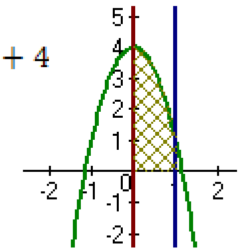
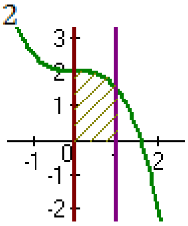
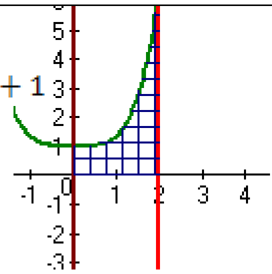
Практическая работа №17-18
Тема: Решение задач. Дифференцирование и интегрирование функций

Цели:

- Повторить, обобщить и систематизировать знания о производной и первообразной.
- Закрепить навыки вычисления производных, первообразных.
- Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

Практическая часть.

Вариант№1	Вариант№2	Вариант№3
1. Найти производную функции.		
1.1.1 $y = 4x^5 + 2e^x - \frac{x^2+3x}{2x^3-x^2}$	1.1.2 $y = 5x^2 - 4e^x + \frac{x^3+2x}{x^2+2x^4}$	1.1.3 $y = \frac{1}{3}x^6 + 7e^x - \frac{3x-x^2}{x^3+x}$
1.2.1 $y = cos^3(4x-1)$	1.2.2 $y = \ln(x^5 + 2x - 4)$	1.2.3 $y = \sqrt{\sin(x^4 + 3x + 4)}$
2.Вычислить приближённо, используя понятие дифференциала.		
2.1.1 $y = \sqrt[4]{90}$	2.1.2 $y = \sqrt[3]{81}$	2.1.3 $y = \sqrt[3]{30}$
2.2.1 $5{,}01^3$	2.2.2 $1{,}005^3$	2.2.3 $1{,}02^3$
3. Найти неопределённый интеграл.		
3.1.1 $\int \left(2sinx - x^5 + \frac{1}{3}e^x\right) dx$	3.1.2 $\int \left(3cosx + 4x^{15} - \frac{5}{x}\right) dx$	3.1.3 $\int \left(\frac{2}{cos^2x} - 6x^{35} + 5e^x\right) dx$
3.2.1 $\int \frac{dx}{(4x-3)}$	3.2.1 $\int (8x+2)^3 dx$	3.2.3 $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) dx$
4. Вычислить площадь плоской фигуры с помощью формулы Ньютона – Лейбница.		

4.1.1 $y=-3x^2+4$ $x=0$ $x=1$ $y=0$ 	4.1.2 $y=-\frac{1}{2}x^3+2$ $x=0$ $x=1$ $y=0$ 	4.1.3 $y=\frac{1}{3}x^4+1$ $x=0$ $x=2$ $y=0$ 

Практическая работа №19-20
Двойной интеграл. Геометрические приложения двойного интеграла

Теоретическая часть

Примеры

1. Изменить порядок интегрирования

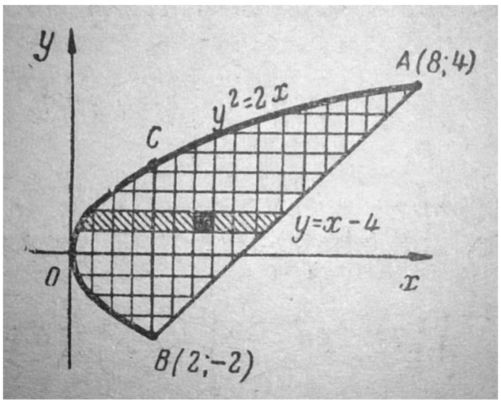
$$\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,y)dy=\int_{0}^{4}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx \quad \int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,y)dy$$

По пределам интегрирования определяем область интегрирования, она ограничена линиями $x=-2, x=2, y=x^2, y=4$

Интегрируем в другом порядке - сначала по x, затем – по y. Пределы внутреннего интеграла найдем, разрешив относительно x уравнение параболы $x=-\sqrt{y}, x=\sqrt{y}$. Пределы внешнего интеграла $y=0, y=4$ находим как наибольшее и наименьшее значения y во всей области интегрирования

2.Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$,где область ограничена прямой $y=x-4$ и параболой $y^2=2x$

Построив данные линии между точками их пересечения (-2,2) и (8,4) получим сегмент AOB. Его можно ограничить по горизонтали двумя линиями $y=-2, y=4$, тогда слева сегмент ограничен

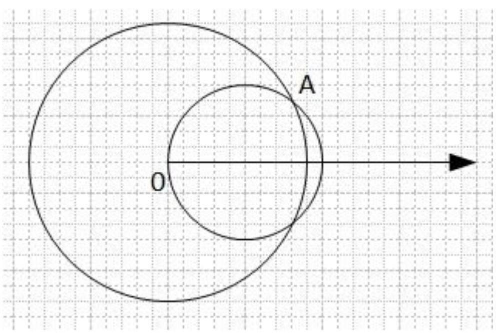


параболой $x=\frac{y^2}{2}$ и справа прямой $x=y+4$

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_{-2}^{4}ydy\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}xdx=\int_{-2}^{4}y\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(y(y+4)^2-y\frac{y^4}{4})dy=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(y^3+8y^2+16y-\frac{y^5}{4})dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{8y^3}{3}+8y^2-\frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=90$$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=4y-y^2, x+y=6$



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, решая систему уравнений $x=4y-y^2$ и $x+y=6$. В результате получим A(2;4), B(3;3). Таким образом,

$$S=\iint_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}dy=\int_2^3\left(-y^2+5y-6\right)dy=$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y3+\frac{5}{2}y2-6y\right]_2^3=\frac{1}{6} \text{ (кв.ед.)}$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=1+x^2, z=3x, y=5, z=0$ и расположенного в I октане.

Тело, объем которого надо вычислить ограниченно сверху плоскостью $z=3x$, сбоку параболическим цилиндром $y=1+x^2$ и плоскостью $y=5$. Следовательно, это цилиндрическое тело. Область D ограничена параболой $y=1+x^2$ и прямыми $y=5$ и $z=0$. Таким образом, имеем

$$V=\iint_D 3xdxdy=3\int_0^2 xdx\int_{1+x^2}^5 dy=3\int_0^2 x\left[y\right]_{1+x^2}^5 dx=3\int_0^2\left(4x-x^3\right)dx=3\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=12 \text{ (куб.ед.)}$$

Выполнить задания:

Изменить порядок интегрирования

1. $\int_2^4 dy\int_y^4 f(x,y)dx$

2. $\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2} f(x,y)dy$

3. $\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx$

Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным линиями

4. $\iint_D x^2ydxdy, y=0, y=\sqrt{2x-x^2}$

5. $\iint_D \sin(x+y)dxdy, y=0, y=x, x+y=\frac{\pi}{2}$

6. $\iint_D x^2(y-x)dxdy, x=y^2, y=x^2$

7. $\iint_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}, x=2, y=x, x=2y$

8.Вычислить двойной интеграл $\iint_D(2x+3y+1)dxdy$ по области, ограниченной треугольником с вершинами (1,3);(-1,-1);(2,-4)

9. Вычислить площадь, ограниченную линиями $x=y^2-2\text{y}, x+y=0$
10. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y^2=4\text{x}+4, y=2-x$
11. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y^2=4\text{x}-x^2, y^2=2x$ (вне параболы)
12. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y=x^2, \text{y}=0, x+y-2=0$
13. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=8, x=0, y=0, z=0, x+y+z=4$
14. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=2y^2, y=0, z=0, x+2y+z=4$
15. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z, y=x^2, y=1, z=0$

16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2, x = 0, y = 0, z = 0, 2x + y = 4$
17. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $3x + 2y = 12, 3x + y = 6, y = 0, z = 0, x + y + z = 6$
18. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x + y + 1, y^2 = x, y = 0, z = 0, x = 1$

Практическая работа № 21-22
Уравнения с разделяющимися переменными

Цель работы:

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения с разделяющими переменными

Содержание работы:

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$y' = \alpha(x)\beta(y)$ или $X(x)dx + Y(y)dy = 0;$

Пример1. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии y(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y \qquad dx = \frac{\ln ydy}{y} \qquad \int dx = \int \frac{\ln ydy}{y} \qquad x + C = \int \ln yd(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$ - общее решение

при y(2) = 1 получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Пример2. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1).$

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Задания для самостоятельной работы:

I вариант:	**I I вариант:**	**I I I вариант:**
1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция:		

$x^2 y' - 2xy = 3$ $y = 3x^2 - \frac{1}{x}$	$y' - y \cdot ctgx = ctgx$ $y = \sin x - 1$	$xy' + 2y = e^{x^2}$ $y = 3 - e^{-x^2}$
1. Решите уравнение с разделяющими переменными		
$y' = 1 + x$	$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$	$ydy - (1 + 2x)dx = 0$
2. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию		
$(1 + x^3)y' = 3x^2 y$ **y(0)=2**	$2\sqrt{y}dx - dy = 0$ **y(0)=1**	$y' + y\sin 2x = 0$ $y(\frac{\pi}{4}) = 1$

Практическая работа №23-24

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + qy = 0$
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$

Цель работы: На конкретных примерах научиться решать линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Содержание работы:

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$y'' + py' + qy = 0$, где *p* и *q*- постоянные величины.

Для отыскания общего решения данного уравнения составляется соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения записывается в зависимости от дискриминанта характеристического уравнения и его корней.

Дискриминант	**D>0**	**D=0**	**D<0**
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = a + bi$ $k_2 = a - bi$
Множества решений	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx}(c_1 + c_2 x)$	$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$; $k_1 = k_2 = 2$.

Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.}$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$; $D = -16$; $k_1 = -1 + 2i$;
$k_2 = -1 - 2i$.

Общее решение: $\boxed{y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).}$

Задания для самостоятельной работы:

Решить уравнения:	**Найдите частные решения уравнений:**
а) $y'' - 5y' + 4y = 0$ б) $y'' - y = 0$ в) $y'' - 7y' + 12y = 0$ г) $y'' - 4y' + 5y = 0$	а) $y'' - 10y' + 25y = 0$; y=2 и $y' = 8$ при x=0 б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; y=1 и $y' = 2$ при x=0 в) $y'' - 9y = 0$; y=2 и $y' = 6$ при x=0

Практическая работа №25-26
Признаки сходимости числового ряда
Цель работы:
Познакомиться с признаками Коши и Даламбера. На конкретных примерах научиться применять данные признаки для исследования ряда на сходимость.

Содержание работы:

Признак Даламбера. (Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ *с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$ *то ряд* $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$ *то ряд* $\sum u_n$ *расходится.*

Признак Коши (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших* n *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{u_n} \le q$,
то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших* n *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{u_n} \ge 1,$ *то ряд* $\sum u_n$ *расходится.*

Пример1: Определить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример2: Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{3^n}}.$$

Решение. По признаку Даламбера ряд сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\sqrt{3^n}}{\sqrt{3^{n+1}}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{n}{2}}\cdot(n+1)}{3^{\frac{n+1}{2}}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1.$$

Практическая работа

1. Написать в развёрнутом виде и исследовать на сходимость ряд:

1. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-1};$ $\quad$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!};$
2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2};$ $\quad$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!};$
3. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3};$ $\quad$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n};$
4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^2};$ $\quad$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}};$

Практическая работа № 27-28

Переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно. Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме

Цель:
- Отработка навыков перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно
– закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов на действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

Содержание:
Запись комплексного числа в виде **z = a + bi**, называется алгебраической формой комплексного числа. Часто бывает удобна тригонометрическая форма записи комплексного числа:

z = r(cos φ + i sin φ), где

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль, а φ = arg z –аргумент комплексного числа.

Пусть по определению аргумента имеем:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Отсюда получается

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

Пример 1
Записать число $z = 1 - \sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме.

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Задания:
Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме, результат записать в тригонометрической форме:

1. $\dfrac{i-1}{1+i}$

6. $\sqrt[3]{-1+i}$

2. $\left(\dfrac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$ 7. $\left(\left(\sqrt{3}-i\right)\left(-1+i\right)\right)^{4}$

3. $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{6}$ 8. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$

4. $\left(\dfrac{0{,}5-0{,}5\sqrt{3}i}{0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i}\right)^{4}$ 9. $\left(\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{3}$

5. $\left(2+\sqrt{12}i\right)^{5}$ 10. $\left(-3-\sqrt{3}i\right)^{3}$

«Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме»

Цель работы – закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов на действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Имеем:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i\,(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Видно, что в тригонометрической форме операции умножения и деления производятся особенно просто: для того, чтобы перемножить (разделить) два комплексных числа, нужно перемножить (разделить) их модули и сложить (вычесть) их аргументы.

Отсюда следует, что для того чтобы перемножить n комплексных чисел, нужно перемножить их модули и сложить аргументы: если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – аргументы чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n,$$

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2| \ldots |z_n|.$$

В частности, если все эти числа равны между собой, то получим формулу, позволяющую возводить комплексное число в любую натуральную степень.

Первая формула Муавра:

$$z^n = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Задания:

1) **Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме, результат записать в тригонометрической форме:**

1. $\frac{i-1}{1+i}$
2. $\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$
3. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{6}$
4. $\left(\frac{0{,}5-0{,}5\sqrt{3}i}{0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i}\right)^{4}$
5. $\left(2+\sqrt{12}i\right)^{5}$
6. $\sqrt[3]{-1+i}$
7. $\left(\left(\sqrt{3}-i\right)\left(-1+i\right)\right)^{4}$
8. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$
9. $\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{3}$
10. $\left(-3-\sqrt{3}i\right)^{3}$

2) **Выполнить действия:**

1 вариант	2 вариант
1. Представьте в тригонометрической форме: $Z=3+2i$ 2. Найти все значения корней: $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$ 3. Возвести в степень, используя тригонометрическую степень: $\left(3-3i\right)^{5}$	1.Представьте в тригонометрической форме: $Z=5-4i$ 2. Найти все значения корней: $\sqrt[4]{-16}$ 3. Возвести в степень, используя тригонометрическую степень: $\left(-5+5i\right)^{3}$
3 вариант 1.Представьте в тригонометрической форме: $Z=-2$ 2. Найти все значения корней: $\sqrt[3]{-2-2i}$ 3. Возвести в степень, используя тригонометрическую форму:	4 вариант 1. Представьте в тригонометрической форме: $Z=1-2i$ 2. Найти все значения корней: $\sqrt[3]{2\sqrt{3}-2i}$ 3. Возвести в степень, используя тригонометрическую форму:

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^4$	$\left(1-i\sqrt{3}\right)^{10}$

3) Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

Вычислить:

1) $z_1 z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) $\sqrt[3]{z_1}$; 4 z_2^5;

1. $z_1 = 1+i,\ z_2 = -\sqrt{3}+i;$
2. $z_1 = 1-i,\ z_2 = -\sqrt{3}-i;$
3. $z_1 = -1+i,\ z_2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$
4. $z_1 = -1-i,\ z_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$
5. $z_1 = 1+\sqrt{3}i,\ z_2 = 2-2i;$
6. $z_1 = 1-\sqrt{3}i,\ z_2 = 2+2i;$
7. $z_1 = -1+\sqrt{3}i,\ z_2 = -2-2i;$
8. $z_1 = -1-\sqrt{3}i,\ z_2 = -2+2i;$
9. $z_1 = \sqrt{3}+i,\ z_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$
10. $z_1 = \sqrt{3}-i,\ z_2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

Практическая работа №29-30

Тема: Решение задач вероятностными методами.

Цели:

- Сформировать навыки вычисления задач вероятностными методами;
- Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

1. Классическая вероятность

В классической схеме вероятность любого события определяется как отношение числа m благоприятных для события A элементарных исходов к общему числу элементарных исходов n.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1:

Некто, перетасовывая колоду из 36 карт, извлекает оттуда случайным образом одну карту. Какова вероятность того, что это будет туз?

Решение:

Тузов всего 4. Это количество благоприятных исходов. Всего карт 36 - это количество всех исходов испытания. Искомая вероятность равна 4/36 = 1/9

Пример 2:

В конверте среди 25 карточек находится разыскиваемая карточка. Из конверта наудачу извлечено 6 карточек. Какова вероятность, что среди них окажется нужная карточка?

Решение:

Извлечь 6 карточек из 25 можно C^6_{25} способами. Это количество всех исходов. Подсчитаем количество благоприятных исходов. Если нужная карточка уже есть в наборе, то остальные пять карточек из 24 можно выбрать C^5_{24} способами.

$$P(A)=\frac{C_{24}^5}{C_{25}^6}=\frac{\frac{24!}{5!\,19!}}{\frac{25!}{6!\,19!}}=\frac{24!\,6!}{5!\,25!}=\frac{6}{25}=0,24$$

1.1 Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

1.2 На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

1.3 Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

1.4 Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

2. Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики

Пример 1: В партии из $N = 10$ деталей имеется $L = 7$ стандартных.

Наудачу отобраны $k = 6$ деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно $r = 4$ стандартных.

Решение: Число n всех возможных элементарных исходов выбора равно числу способов, которыми можно извлечь k деталей из N деталей, т.е. $n = C_N^k$ – числу сочетаний из N элементов по k.

$$n = C_N^k = C_{10}^6 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$$

Подсчитаем число исходов, составляющих интересующее нас событие A – (среди k деталей ровно r стандартных). Из k стандартных деталей взять r стандартных деталей можно C_k^r способами, при этом остальные $k - r$ деталей должны быть нестандартными; взять их из $N - L$ нестандартных деталей можно C_{N-L}^{k-r} способами. Число m всех благоприятствующих A исходов равно произведению $m = C_k^r . C_{N-L}^{k-r}$.

$$m = C_k^r . C_{N-L}^{k-r} = C_7^4 . C_3^2 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1} = 105.$$

Вероятность события A равна отношению m – числа исходов, благоприятствующих событию A, к n – числу всех возможных элементарных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_k^r\cdot C_{N-L}^{k-r}}{C_N^k}\ \frac{105}{210} = 0,5.$$

2.1 Из 100 изготовленных пальто оказалось 7 третьего сорта, а остальные пальто первого и второго сорта. Какова вероятность, что пять отобранных пальто будут первого или второго сорта.

2.2 Студент знает 30 из 40 вопросов программы. Каждый билет содержит два вопроса программы. Найти вероятность того, что студент знает оба вопроса билета.

2.3 Из урны, в которой 30 шаров белых и 4 красных, наудачу вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что среди них есть хотя бы один красный шар.

2.4 В партии из 10 приборов 8 не имеют дефекта. Найти вероятность того, что из двух наудачу взятых приборов хотя бы один без дефекта.

2.5 Из полного набора костей домино наугад берут 3 кости. Какова вероятность того, что хотя бы две из них дубли?

2.6 Открываются одна за другой карты колоды из 36 штук. Какова вероятность того, что первой картой пиковой масти окажется пятая карта?

2.7 В урне 6 белых и 5 красных шаров. Наугад последовательно без возврата вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара красные.

2.8 Среди 17 студентов группы, из которых восемь девушек, разыгрывается семь билетов, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся четыре девушки?

2.9 Партия из 100 изделий содержит 40 изделий 1–го сорта, а остальные второго сорта. Наудачу берут 4 изделия, найти вероятность того, что все они будут одного сорта.

2.10 Найти вероятность того, что в 4-х значном номере наудачу взятой машины: а) все цифры различны, б) все цифры одинаковы.

3. Вычисление вероятностей независимых событий

Пример 1: Для сообщения об аварии установлены два *независимо* работающих автомата – сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна $p_1 = 0{,}95$, второй – $p_2 = 0{,}9$. Найти вероятность события A – при аварии поступит сигнал хотя бы от одного сигнализатора.

Решение: Событие A может осуществиться, если произойдет одно из следующих событий: сработает первый сигнализатор и одновременно не сработает второй – $A_1\bar{A}_2$; сработает второй сигнализатор и одновременно не сработает первый – $\bar{A}_1A_2$; одновременно сработают оба сигнализатора –A_1A_2, т.е. $A = A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2 + A_1A_2$. Вероятности противоположных событий $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ соответственно равны $q_1 = 1 - p_1 = 0{,}05$ и $q_2 = 1 - p_2 = 0{,}1$. События, составляющие A, несовместны (не могут произойти одновременно), поэтому вероятность события A равна

$$P(A) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2) + P(A_1A_2) = p_1\cdot q_2 + q_1\cdot p_2 + p_1\cdot p_2 = 0{,}995.$$

2–й способ: Событие $\bar{A}$ противоположное A произойдет, если одновременно не сработают оба сигнализатора – $\bar{A}_1\bar{A}_2$. Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = 1 - q_1\cdot q_2 = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$$

3.1 Трое охотников одновременно выстрелили в зайца. Найти вероятность того, что заяц будет убит, если каждый из охотников убивает зайца с вероятностью 0,5; 0,7 и 0,9 соответственно.

3.2 Два студента ищут нужную книгу в магазинах. Вероятность того, что книга будет найдена первым студентом, равна 0,6, а вторым - 0,7. Найти вероятность того, что только один студент найдет книгу.

3.3 В электрической цепи 3 элемента, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,1. Определить вероятность разрыва цепи при параллельном соединении элементов.

3.4 Вероятность наличия нужного материала на 1–й базе равна 0,9, на 2–й – 0,95, на 3–й – 0,8, на 4–й – 0,6. Найти вероятность того, что только на одной базе окажется нужный материал.

3.5 Два стрелка делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком 0,7, а вторым равна 0,6. Найти вероятность того, что а) мишень будет поражена; б) только одно попадание в цель.

3.6 Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,4, третий – 0,7. Найти вероятность того, что в течение часа только один станок не потребует внимания рабочего.

3.7 Вероятность наличия нужного материала на 1–й базе равна 0,9, на 2–й – 0,95, на 3–й – 0,8, на 4–й – 0,6. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

3.8 В электрической цепи 3 элемента, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,1. Определить вероятность разрыва цепи при последовательном соединении этих элементов.

3.9 Вероятность безотказной работы блока, входящего в систему, составляет 0,8. Для повышения надежности устанавливают такой же резервной блок. Найти вероятность безотказной работы блока.

3.10 Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности зачисления в сборную команду первого, второго и третьего спортсмена соответственно равны 0,8; 0,7; 0,6, Найти вероятность того, что хотя бы один из этих спортсменов войдет в сборную.

4. Формула полной вероятности

Пример 1: За различными материалами послана автомашина наудачу на одну из трех баз. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй - 0,8, на третьей - 0,6. Найти вероятность того, что автомашина не привезет нужного материала.

Решение: Для получения нужного материала необходимо выбрать одну из баз. События H_1, H_2, H_3 - взятие материала с определенных баз составляют полную группу событий, примем эти события за гипотезы, их вероятности равны $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$, т.к. гипотезы равновозможные. Условные вероятности события A – (нет нужного материала) соответственно равны $P(A\text{ï}H_1) = 1 – 0{,}9 = 0{,}1$, $P(A\text{ï}H_2) = 0{,}2$, $P(A\text{ï}H_3) = 0{,}4$. Тогда по формуле полной вероятности получим

$P(A) = P(A\text{ï}H_1)\cdot P(H_1) + P(A\text{ï}H_2)\cdot P(H_2) + P(A\text{ï}H_3)\cdot P(H_3) = 0{,}175.$

4.1 В одной урне 5 белых и 8 красных, а в другой 10 белых и 6 красных шаров. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что он белого цвета?

4.2 Вероятность выполнить работу без ошибок для 10–ти студентов из группы равна 0,95; для 15–ти – 0,7, а для 3–х остальных – 0,2. Преподаватель берет наудачу одну тетрадь для проверки. Какова вероятность того, что работа выполнена без ошибок?

4.3 На сборку поступило 3000 деталей с первого станка и 2000 со второго. Первый станок дает 0,2%, а второй 0,3% брака. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь из не рассортированной продукции станков окажется бракованной.

4.4 Имеется 2 партии одинаковых изделий из 10 и 12 штук, причем в каждой партии по одному бракованному изделию. Наудачу взятое изделие из первой партии переложили во вторую, после чего наудачу взяли изделие из 2–й партии. Найти вероятность того, что оно бракованное.

4.5 В сосуд, содержащий 5 шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из него белый шар, если предположения о первоначальном присутствии в сосуде от 0 до 5 белых шаров равновозможны?

4.6 Радиолампа, вставленная в телевизор, может принадлежать к одной из партий с вероятностями: 0,3: 0,2; 0,5. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, для этих партий равны соответственно: 0,9; 0,8; 0,6. Найти вероятность того, что лампа проработает заданное число часов, если она выбрана наудачу.

4.7 Студенту нужна книга, которая может находиться в одной из 4–х библиотек с вероятностями 0,8; 0,7; 0.9; 0,75. Студент пошел в наудачу выбранную библиотеку. Какова вероятность того, что он получит книгу?

4.8 Команда разделена на 3 группы: старшая –5 человек, средняя – 4 человека, младшая – 10 человек. Вероятности занять первое место для членов каждой группы равны соответственно 0,2; 0,15; 0,1. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен станет чемпионом?

4.9 В ящиках находятся соответственно: I) 2 белых и 3 черных шара; 2) 4 белых и 3 черных шара: 3) 6 белых и 2 черных шара. Из наудачу выбранного ящика вынимают шар. Найти вероятность того, что он белый.

4.10 Легковые и грузовые автомобили в транспортном потоке мимо АЗС встречаются в отношении 5:3. На заправку заезжает каждая 8-я легковая и каждая 12-я грузовая. Какова вероятность того, что подъезжающая машина заедет на заправку?

Практическая работа № 31-32

Тема: Вычисление среднего арифметического, математического ожидания и дисперсии случайной дискретной величины.

Цели:

- Сформировать навык нахождения числовых характеристик дискретной случайной величины;
- Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

Теоретическая часть.

Простая средняя арифметическая — Равна отношению суммы индивидуальных значений признака к количеству признаков в совокупности

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Пример 1. Бригада из 6 рабочих получает в месяц 3 3,2 3,3 3,5 3,8 3,1 тыс. руб.
Найти среднюю заработную плату.
Решение:
(3 + 3,2 + 3,3 +3,5 + 3,8 + 3,1) / 6 = 3,32 тыс. руб.

Взвешенная средняя арифметическая — равна отношению (суммы произведений значения признака к частоте повторения данного признака) к (сумме частот всех признаков). Используется, когда варианты исследуемой совокупности встречаются неодинаковое количество раз.

Представим это в виде следующей формулы:

$$x = \sum x_i w_i / \sum w_i$$

- x_i — цена за единицу продукции;
- w_i — количество (объем) продукции;

Пример 2. Найти среднюю заработную плату рабочих цеха за месяц

Заработная плата одного рабочего тыс. руб; X	Число рабочих F
3,2	20
3,3	35
3,4	14
4,0	6
Итого:	75

Средняя заработная плата может быть получена путем деления общей суммы заработной платы на общее число рабочих:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{64,0 + 115,5 + 47,6 + 24,0}{20 + 35 + 14 + 6} = \frac{251,1}{75}$$

Ответ: 3,35 тыс.руб.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называ-ется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Пример 3. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:

X	5	4	3
p	0,2	0,5	0,3

Решение: По формуле находим математическое ожидание:

*M (X) = 5*0,2 + 4*0,5 + 3*0,3 = 3,3.*

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Пример 4. Найти дисперсию случайной величины *X*, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Решение: По формуле находим математическое ожидание:

*M (X) = 1*0,3 + 2*0,5 + 5*0,2 = 2,3.*

Записываем все возможные значения квадрата отклонения:

$[X_1 - M(X)]^2 = (1 - 2,3)^2 = 1,69$;

$[X_2 - M(X)]^2 = (2 - 2,3)^2 = 0,09$;

$[X_3 - M(X)]^2 = (5 - 2,3)^2 = 7,29$.

Тогда закон распределения квадрата отклонения имеет следующий вид:

$[X - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2

По формуле находим дисперсию:

*D (X) = 1,69*0,3 + 0,09*0,5 + 7,29*0,2 = 2,01*.

Практическая часть.

1. Задан закон распределения случайной величины ***X*** (в первой строке таблицы указаны возможные значения величины ***X***, а во второй строке указаны вероятности ***p*** этих возможных значений). Найти:

1. математическое ожидание,
2. дисперсию,
3. построить многоугольник распределения.

1.1

x	23	25	28	29
p	0,3	0,2	0,4	0,1

1.2

x	17	21	25	27
p	0,2	0,4	0,3	0,1

1.3

x	24	26	28	30
p	0,2	0,2	0,5	0,1

1.4

x	12	16	19	21
p	0,1	0,5	0,3	0,1

1.5

x	25	27	30	32
p	0,2	0,4	0,3	0,1

1.6

x	30	32	35	40
p	01	0,5	0,2	0,2

1.7

x	12	14	16	20
p	0,1	0,2	0,5	0,2

1.8

x	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

1.9

x	18	22	23	26
p	0,2	0,3	0,4	0,1

1.10

x	25	28	30	33
p	0,1	0,2	0,4	0,3

2. Рассчитать средний возраст студентов в группе из 20 человек:

№ п\п	**Возраст (лет)**	**№ п\п**	**Возраст (лет)**	**№ п\п**	**Возраст (лет)**	**№ п\п**	**Возраст (лет)**
1	18	6	20	11	22	16	21
2	18	7	19	12	19	17	19
3	19	8	19	13	19	18	19
4	20	9	19	14	20	19	19
5	19	10	20	15	20	20	19

Литература

Основные источники:

1. Математика учебник для студ. учреждений сред. проф. образования Башмаков М.И. 2019-256с. ИЦ Академия (для СПО)
2. Баврин И.И. Математика для тех колледжей учебник и практикум для СПО 2-издание , изд. Москва Юрайт 2018-329с.
3. Богомолов Н.В. Геометрия учебное пособие для СПО изд. Москва Юрайт2018-92с.
4. Богомолов Н.В.Алгебра и начала анализа учебное пособие для СПО изд. Москва Юрайт 2018-200с.
5. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: учебник / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2020

Интернет-ресурсы:

1. http://c1623.c.3072.ru/ Портал дистанционного обучения.